

Modellierung der Inanspruchnahme positiver Minutenreserve als zusammengesetzter Poisson-Prozess mit regelzonenabhängiger Parametrierung

Dipl.-Ing. Eva Marie Kurscheid, Dr. Dana Uhlig-Düvelmeyer
Technische Universität Chemnitz

29. Januar 2009

1 Minutenreserve

Elektroenergie ist nur durch Umwandlung in andere Energieformen und auch dann nur in geringem Umfang speicherbar. Die Produktion von Elektroenergie hat zu jedem Zeitpunkt exakt dem Verbrauch an Elektroenergie zu entsprechen, um Stabilität im Stromnetz zu gewährleisten. Zur Umsetzung werden der Strombedarf und Pflichtabnahmen wie beispielsweise Strom aus Windenergie geschätzt. Die Schätzung des Strombedarfs der Kunden ergibt die Lastprognose. Der Fehler der Lastprognose kann in bestimmten Situationen durchaus 5 % und mehr betragen. Der Fahrplan der Kraftwerke richtet sich nach den zuvor getroffenen Prognosen, um eine möglichst ausgeglichene Energiebilanz zu erhalten. Ist der reale Bedarf zu einem Zeitpunkt höher als geschätzt, wird positive Regelenergie zum Ausgleich benötigt. Bei niedrigerem Bedarf als geschätzt wird negative Regelenergie eingesetzt. Die Bereitstellung dieser Regelenergie erfolgt durch ein mehrstufiges Reserveleistungssystem. In Zukunft wird der Einsatz dezentraler KWK-Anlagen zur Bereitstellung von Reserveleistung angestrebt. Zur Bewertung dieser Idee ist ein Modell für die Charakteristik der Inanspruchnahme von Reserveleistung erforderlich. Minutenreserve ist Bestandteil des mehrstufigen Systems zur Sicherung der Energiebilanz im Höchstspannungsnetz. Die einzelnen Stufen sind nach der Zeitspanne ihrer Verfügbarkeit bei einem Abruf in die Produkte Primär-, Sekundär- und Minutenreserve unterteilt. Die UCTE gibt im Operation Handbook Empfehlungen zum zeitlichen Einsatz der Reserve, verbindliche Details sind über den Transmission-Code 2007 geregelt [1]. Bei Sekundär- und Minutenreserve wird in positive und ne-

gative Reserve unterteilt. Die Primärreserve hat binnen 30 Sekunden voll aktiviert zu sein und für eine Dauer von mindestens 15 Minuten zur Verfügung zu stehen. Gemäß Selbstverpflichtung der UCTE-Teilnehmer wird die Primärreserve bereits innerhalb der ersten 15 bis 30 Sekunden durch die Sekundärreserve abgelöst. Minutenreserve wird auch als Tertiärreserve oder 15min-Reserve bezeichnet. Sie dient der Ablösung der Sekundärreserve bei größeren, länger andauernden Erzeugungsdefiziten oder -überhängen und wird vom Übertragungsnetzbetreiber üblicherweise telefonisch angefordert. Soweit möglich, wird die Minutenreserve durch eine Stundenreserve abgelöst, die als Blockkontrakt an der Strombörse in entsprechender Höhe zugekauft wird. Ausschreibung und Abrechnung von Minutenreserve werden über die Internetplattform regelleistung.net abgewickelt. Dort stehen insbesondere die Daten zur Inanspruchnahme der Minutenreserve in den einzelnen Regelzonen zum Download bereit. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Auswertung und Modellierung der Inanspruchnahme positiver Minutenreserve. Deutschland ist auf Höchstspannungsebene in vier Regelzonen unterteilt. Datenanalyse, Modellparametrierung und Modellverifikation erfolgen daher gegliedert nach vier Netzbetreibern der Regelzonen, namentlich RWE Transportnetz Strom GmbH (kurz: RWE), EON Netz GmbH (kurz: EON), EnBW Transportnetze AG (kurz EnBW) und Vattenfall Europe Transmission GmbH (kurz: VET).

2 Statistische Auswertung

Die Netzbetreiber der Regelzonen haben im Laufe des Jahres 2005 zu verschiedenen Zeitpunkten begonnen, Datenmaterial zur Inanspruchnahme positiver Minutenreserve im Internet zum Download zur Verfügung zu stellen. Als einheitlicher Startzeitpunkt der Analyse wird daher für alle Regelzonen der 1. Januar 2006 gewählt und das Datenmaterial für die Jahre 2006 und 2007 statistisch ausgewertet. Die Datenerfassung erfolgt im Viertelstundentakt, d.h. je Tag und Regelzone existieren 96 Werte. Die Summe aller Inanspruchnahmen im Betrachtungszeitraum von 2 Jahren bildet folglich eine Zeitreihe mit rund 70.000 Datenpunkten pro Jahr und Regelzone. Die Abrufhäufigkeit ist insgesamt gering, die absolute Anzahl eingetretener Abrufe betrug 183 (EnBW), 187 (VET), 866 (EON) und 2631 (RWE). Die Abrufintensität lag dabei in allen Regelzonen unter 4 %, in den Regelzonen VET und EnBW sogar unter 0,3 %. Die Abrufe treten sprunghaft und zufällig ein. Plots der Zeitreihen zeigen dennoch eine Tageszeitabhängigkeit der Abrufintensität [2]. Die nach Tageszeiten kumulierten absoluten Häufigkeiten der Abrufe bestätigen dieses Ergebnis in allen vier Regelzonen (Abb. 1). Für die Berechnung statistischer Kenngrößen der Abrufhöhen wurden die Datenpunkte mit Abrufhöhe null aus den Zeitreihen eliminiert. Die Auswertung zeigt häufige Abrufe mittlerer Höhe bei gleichzeitigem Auftreten sehr geringer und maximaler Abrufmengen. In

der RWE-Regelzone ist die mittlere Abrufhöhe nahezu unabhängig von der Tageszeit, in allen anderen Regelzonen ist die abgerufene Leistung tagsüber höher als in den Nachtstunden [3]. Auf einen Abruf positiver Minutenreserve folgen häufig direkt weitere Abrufe in etwa derselben Höhe. Diese als Gruppe auftretenden Abrufe werden im Folgenden als Büschelabrufe bezeichnet.

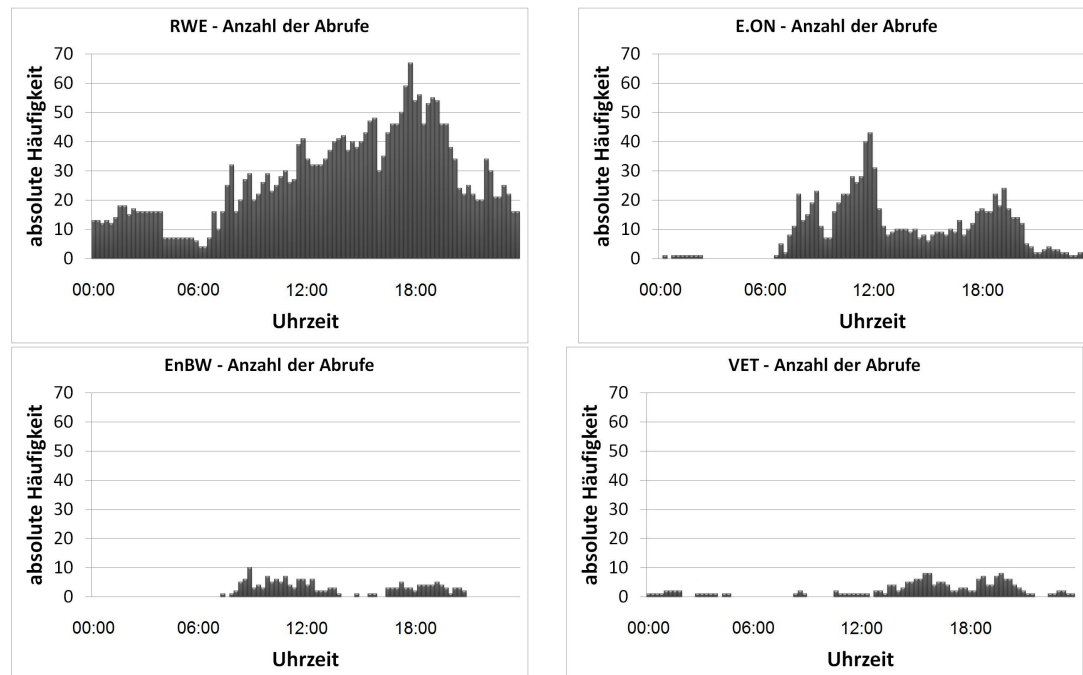


Abbildung 1: Absolute Anzahlen der Abrufe positiver Minutenreserve nach Tageszeiten und Regelzonen, summierte Werte der Jahre 2006 und 2007

Gründe für die Tageszeitabhängigkeit der Abrufintensität liegen vermutlich in einer unzureichend guten Lastprognose. Beträgt in einem System mit Spitzenlast 10 GW der tatsächliche Lastprognosefehler +5 %, beträgt der absolute Prognosefehler bei Spitzenlast 500 MW. Diese Differenz wird über Reserveleistung ausgeglichen und führt mit hoher Wahrscheinlichkeit zu einem Abruf positiver Minutenreserve zur Spitzenlastzeit. Mit einer Verbesserung der Prognosegenauigkeit der Last, aber auch der übrigen fluktuierenden Einspeisungen wird die Tageszeitabhängigkeit der Minutenreserve abnehmen.

3 Basismodell für Abrufcharakteristik

In der Theorie erfolgt der Einsatz von Reserveleistung unvorhersehbar und damit nicht prognostizierbar. Um diesem zufälligen Charakter gerecht zu werden,

erfolgt die Modellierung der Minutenreserve-Abrufe als stochastischer Prozess. Statistische Auswertungen aller vier Regelzonen haben gezeigt, dass die Abrufe tatsächlich zufällig auftreten (vgl. Abschnitt 2). Deswegen wird zur Modellierung der Abrufzeitpunkte τ_1, τ_2, \dots ein Poisson-Prozess $(N_t, t \geq 0)$ verwendet [4]. Die Zeitpunkte τ_j sind dabei die Sprungzeitpunkte des Poisson-Prozesses.¹ Der einfache Poisson-Prozess liefert stochastisch verteilte Minutenreserve-Abrufe mit einer konstanten Höhe von eins. Da die Abrufhöhen in der Realität stark schwanken und ebenfalls nicht prognostizierbar sind, eignet sich ein einfacher Poisson-Prozess zur hinreichend genauen Nachbildung nicht. Daher erfolgt eine Erweiterung um zufällig verteilte Abrufmengen. Die Abrufmengen zu den Zeitpunkten $(\tau_j)_{j \geq 1}$ werden als Folge unabhängiger Zufallsgrößen $(Y_j)_{j \geq 1}$ modelliert. Somit beschreibt der Prozess $(M_t, t \geq 0)$ mit

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \quad (1)$$

die Menge der bis zum Zeitpunkt t insgesamt abgerufenen Minutenreserveenergie und die Sprunghöhen $dM_t = M_{t+} - M_{t-}$ die zum Zeitpunkt t abgerufene Minutenreserve-Energiemenge. Ein solcher Prozess wird als zusammengesetzter Poisson-Prozess bezeichnet. Abbildung 2 zeigt zwei verschiedene Trajektorien eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses (links) und die daraus resultierenden Minutenreserveabrufe (rechts). Die Trajektorien unterscheiden sich in der Wahl der Abrufintensität λ . Diese hat Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Abrufs zu einem beliebigen Zeitpunkt.

Als Verteilung für die Zufallsgrößen $Y_j = Y(\tau_j)$, die die Abrufmenge zum Zeitpunkt τ_j beschreiben, wird die logarithmische Normalverteilung mit zeitabhängigen Parametern gewählt, d.h. $\log Y(t) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$. Die Zeitabhängigkeit ist notwendig, da die statistischen Auswertungen der Minutenreserve-Abrufe aller vier Regelzonen eine Tageszeitabhängigkeit gezeigt hat (vgl. Abschnitt 2). Die Abrufzeitpunkte sind in diesem Modell tageszeitunabhängig. Die real aufgetretene Tageszeitabhängigkeit wird über die Abrufhöhe berücksichtigt. Der Tag wird dafür in Zeitzonen eingeteilt, für die die Parameter Erwartungswert und Varianz der Abrufhöhe separat geschätzt werden. Das Modell bildet folglich die Tageszeitabhängigkeit der abgerufenen Energiemengen exakt ab, nicht jedoch die Tageszeitabhängigkeit der Abrufzeitpunkte. Für die spätere Anwendung des Modells auf die Bewertung des Einsatzes von KWK-Anlagen ist eine energiemengenkorrek-

¹Für alle Sprungzeitpunkte τ_i des Poisson-Prozesse $(N_t, t \geq 0)$ gilt $N_{\tau_j^-} := \lim_{t \rightarrow \tau_j^-} N_t = N_{\tau_j^+} - 1$, wobei $N_{\tau_j^+} := \lim_{t \rightarrow \tau_j^+} N_t$. Ferner beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass genau n Sprünge bis zum Zeitpunkt t stattfinden gerade $\mathbb{P}(N_t = n) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

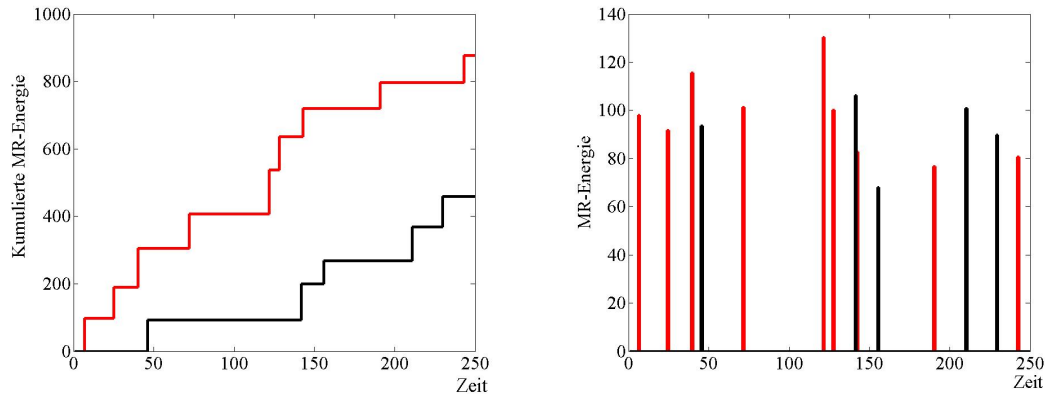


Abbildung 2: Zwei beispielhafte Trajektorien eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses (links) und mit den Sprüngen korrespondierende Minutenreserve-Abrufe (rechts)

te Betrachtung vollkommen ausreichend. Im Hinblick auf die Parameterschätzung ist das Modell so einfach wie möglich zu halten. Die Beschränkung auf wenige Eingangsparameter ist mit Hinblick auf künftige Modellanpassungen wünschenswert.

Für die Intensität λ des Poisson-Prozesses wird wegen $\mathbb{E}N_t = \lambda t$ die durchschnittliche Anzahl von Abrufen in einer Zeiteinheit gewählt. Um die zeitabhängigen Parameter der logarithmisch verteilten Sprunghöhen zu ermitteln, wird der Tag in einzelne Zeitzonen mit ähnlichen typischen Abrufverhalten eingeteilt. Für die jeweilige Zeitzone werden die entsprechenden Parameter aus den ersten beiden empirischen Momenten geschätzt, indem folgender Zusammenhang

$$\mathbb{E}Y = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \text{Var } Y = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1) \quad (2)$$

genutzt wird².

Die Betrachtung der Daten in den vier Regelzonen zeigte häufig mehrere direkt aufeinander folgende Abrufe, die als Büschelabrufe bezeichnet wurden (vgl. Abschnitt 2). In solchen Fällen wird von den Netzbetreibern in mehreren direkt aufeinander folgenden Viertelstunden positive Minutenreserve abgerufen. Dies bildet das Modell aufgrund der Eigenschaften eines Poisson-Prozesses bisher nicht nach. Deswegen wird das Modell im nächsten Schritt um eine entsprechende Komponente erweitert.

²Aus (2) folgt $\sigma^2 = \log\left(\frac{\text{Var } Y}{\mathbb{E}Y^2} + 1\right)$ und $\mu = \log \mathbb{E}Y - \frac{\sigma^2}{2}$, sodass die Parameter μ und σ mittels empirischen Mittelwert und Standardabweichung geschätzt werden können.

4 Erweiterung um Büschelabrufe

Der Poisson-Prozess liefert die Zeitpunkte τ_j , zu denen Minutenreserveabrufe stattfinden. Für jeden dieser Zeitpunkte wird nun ermittelt, ob zu den jeweils direkt folgenden Zeitpunkten $\tau_j + \Delta t, \tau_j, \tau_j + 2\Delta t, \dots$ ebenfalls Abrufe stattfinden. Hierfür wird eine Folge unabhängiger³, geometrisch verteilter Zufallsgrößen $(X_j)_{j \geq 1}$ verwendet, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass genau k ($k = 0, 1, \dots$) zusätzliche Abrufe folgen, beträgt $\mathbb{P}(X_j = k) = p^k(1 - p)$. Die Abrufmengen der zusätzlichen Abrufe nach dem Zeitpunkt τ_j werden in der gleichen Höhe wie die abgerufene Menge $Y(\tau_j)$ zum Zeitpunkt τ_j gewählt. Folglich wird der Prozess (1) entsprechend

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \left(Y(\tau_j) + \sum_{k=1}^{X_j} \mathbb{1}_{\{\tau_j + k\Delta t \leq t\}} Y(\tau_j) \right) \quad (3)$$

modifiziert. Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{\{\tau_j + k\Delta t \leq t\}}$ hat den Wert null, falls $\tau_j + k\Delta t > t$, d.h. der zusätzliche Sprung zum Zeitpunkt $\tau_j + k\Delta t$ erst nach dem Zeitpunkt t stattfindet. Würde diese Abfrage vernachlässigt und die Indikatorfunktion durch eins ersetzt, würden mehr Abrufe generiert werden als erwünscht. Für das erweiterte Modell (3) ist nur ein zusätzlicher Parameter p zu schätzen. Hierfür wird genutzt, dass $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p$ gilt⁴. Die Bestimmung der Intensität des Poisson-Prozesses wird durch diese Modellerweiterung komplexer. Zur Bestimmung der Intensität wird der Prozess $(A_t, t \geq 0)$ mit

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{j=1}^{N_t} \left(1 + \sum_{k=1}^{X_j} \mathbb{1}_{\{\tau_j + k\Delta t \leq t\}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N_t} \left(1 + \min \left\{ X_j, \left\lfloor \frac{t - \tau_j}{\Delta t} \right\rfloor \right\} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

betrachtet. Formel (4) beschreibt die Anzahl der Abrufe bis zum Zeitpunkt t . Zu jedem Abruf zum Zeitpunkt τ_j , der durch den Poisson-Prozess $(N_t, t \geq 0)$ generiert wird, werden jeweils X_j zusätzliche Abrufe hinzugefügt⁵. Die Intensität λ ist folglich entsprechend zu verkleinern, damit die mittlere Anzahl der Abrufe $\mathbb{E}A_t$ mit der durchschnittlich beobachteten Anzahl übereinstimmt. Allerdings ist die Berechnung des Erwartungswertes von (4) schwierig. Deswegen wird der einfacherere

³Die Zufallsgrößen $(X_j)_{j \geq 1}$, $(Y_j)_{j \geq 1}$ und der Poisson-Prozess seien stochastisch unabhängig.

⁴Es gilt $\mathbb{E}X = \frac{p}{1-p}$ und $\text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$ und somit $p = 1 - \frac{\mathbb{E}X}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$, weshalb p auch mittels $\bar{p} = 1 - \frac{\bar{x}_n}{s_n^2}$ geschätzt werden kann.

⁵Falls die Zeitpunkte der zusätzlichen Abrufe erst nach dem Zeitpunkt t liegen, sind es entsprechend weniger zusätzliche Abrufe.

Prozess $(\tilde{A}, t \geq 0)$ mit

$$\tilde{A}_t = \sum_{j=1}^{N_t} \left(1 + \sum_{k=1}^{X_j} 1 \right) = \sum_{j=1}^{N_t} (1 + X_j) \quad (5)$$

betrachtet, für den $\mathbb{E}\tilde{A}_t = \lambda t \frac{1}{1-p}$ gilt (Rechnungen siehe Anhang (A)). Wegen $A_t \leq \tilde{A}_t$ kann die mittlere Anzahl von Abrufen mittels

$$\mathbb{E}A_t \leq \mathbb{E}\tilde{A}_t = \lambda t \frac{1}{1-p} \quad (6)$$

von oben abgeschätzt werden. Nach Schätzung der mittleren Anzahl von Abrufen $\lambda_{data}t$ aus den Ausgangsdaten ist die Intensität λ des Poisson-Prozesses wegen $\mathbb{E}A_t \approx \mathbb{E}\tilde{A}_t \stackrel{!}{=} \lambda_{data}t$ näherungsweise als

$$\lambda_{approx} = \lambda_{data}(1-p) \quad (7)$$

zu wählen. Offensichtlich gilt für die exakte unbekannte Intensität λ wegen (6) folgende Abschätzung

$$\lambda \geq \frac{\mathbb{E}A_t}{t}(1-p) = \lambda_{data}(1-p) = \lambda_{approx}.$$

Der Fehler, der durch die Verwendung von λ_{approx} anstelle der exakten Intensität λ entsteht, ist wegen der Abschätzung $0 \leq \mathbb{E}(\tilde{A}_t - A_t) \leq \lambda t \frac{p}{1-p}$ für kleine p vernachlässigbar (Rechnung siehe Appendix (10)). Für $p \approx 1$ kann dieser Fehler größer werden und damit nicht mehr vernachlässigbar sein.

5 Bewertung der Modellgüte

Die Zielsetzung der Modellierung ist, nahezu alle denkbaren Varianten in der Praxis auftretender Minutenreserve-Ganglinien generieren zu können. Als Ausgangsdaten sollten möglichst wenige und leicht zu ermittelnde Parameter genügen. Diesem Ziel steht eine größtmögliche Realitätsnähe gegenüber. Der getroffene Kompromiss aus beiden Zielen verwendet als Eingangsgrößen lediglich die Intensität λ , den Erwartungswert der Abrufmenge, dessen Varianz und die Wahrscheinlichkeit p für die Büschellänge. Diese können stabil aus den Ausgangsdaten geschätzt werden (vgl. Abschnitte 3 und 4). Die Umfangsauswahl historischer Ausgangsdaten ist ein Abwägen zwischen statistischer Stabilität und zu starker Verwässerung durch Mittellung. Für die vorliegende Bewertung der Modellgüte werden je Regelzone gut 70.000 Ausgangswerte berücksichtigt. Dies entspricht einem Zeitraum von

2 Jahren. Für alle drei Parametergruppen decken sich die Mittelwerte gut mit dem Erwartungswert (Tabelle 1). Exaktere Simulationsergebnisse sind möglich, gehen aber mit einer verstärkten Anpassung des Modells an in den Jahren 2006 und 2007 aufgetretene Besonderheiten einher. Damit vermindern sie die Allgemeingültigkeit des Modells für Folgejahre und die einfache Anpassbarkeit an zukünftige Trends.

Absolute Anzahl Abrufe	RWE	EON	EnBW	VET
Erwartungswert	1315	433	91	93
Simulationsergebnis	1272	429	82	96
Abgerufene Energiemenge [GWh]	RWE	EON	EnBW	VET
Erwartungswert	84,61	35,13	4,32	4,36
Simulationsergebnis	81,4	30,6	3,6	5,2
Mittlere Längen der Abrufbüschel	RWE	EON	EnBW	VET
Erwartungswert	7,62	3,81	3,45	4,55
Simulationsergebnis	7,77	3,96	3,35	4,64

Tabelle 1: Simulationsergebnisse im Vergleich zu Erwartungswerten

6 Zusammenfassung

Um den Einsatz dezentraler Klein-KWK-Anlagen als Lieferant positiver Minutenreserve zu untersuchen, sind detaillierte Kenntnisse über die Charakteristik der Ganglinien bei der Inanspruchnahme positiver Minutenreserve erforderlich. Daher wurde die Abrufcharakteristik positiver Minutenreserve nach Regelzonen untersucht und ein mathematisches Modell abgeleitet. Die Inanspruchnahme positiver Minutenreserve tritt üblicherweise sprunghaft und ungeplant ein. Sie erfolgt meist büschelweise, gelegentlich treten Einzelabrufe auf. Die Wahrscheinlichkeit für eine Inanspruchnahme positiver Minutenreserve ist zu Lastspitzen höher als zu Schwachlastzeiten. Die Charakteristik der Inanspruchnahmen ist stark regelzonenabhängig. Für die mathematische Modellierung unplanmäßig und sprunghaft eintretender Ereignisse bietet sich ein Poisson-Prozess an. Jeder Sprung im Prozess hat die Höhe 1 und markiert einen Zeitpunkt, zu dem ein Abruf positiver Minutenreserve eintritt. Mit logarithmisch-normalverteilten Abrufhöhen ergibt sich ein zusammengesetzter Poisson-Prozess als Grundmodell des Abrufverhaltens. Die Nachbildung von Büschelabrufen erfolgt über eine geometrische Verteilung, die die mittlere Länge der Abrufbüschel als Parameter erhält. Die Parameterschätzung erfolgt anhand der realen Daten in den Jahren 2006 und 2007. Das Modell benötigt lediglich den Erwartungswert der Anzahl Abrufe pro Jahr, den Erwartungswert der insgesamt abgerufenen Energiemenge pro Jahr und die mittlere Länge der Ab-

rufbüschel als Eingangsparameter. Daher ist eine Anpassung an künftige Entwicklungen mit geringem Aufwand möglich. Das um Büschelabrufe erweiterte Modell bildet die Abrufcharakteristik positiver Minutenreserve hinreichend gut nach und ist damit für weitergehende Untersuchungen zum Einsatz dezentraler Klein-KWK-Anlagen geeignet.

Literatur

- [1] VDEW (2007): *TransmissionCode2007 Netz- und Systemregeln der deutschen Übertragungsnetzbetreiber*. Version 1.1, Berlin
- [2] Eva Marie Kurscheid und Dana Uhlig-Düvelmeyer (2008): Zur Anwendbarkeit von Zeitreihenanalyse auf die Modellierung der Inanspruchnahme positiver Minutenreserve. ISBN 978-80-7043-681-3, Seiten 24-29
- [3] Anne Wenzel (2008): *Erstellung eines Modells zum Abruf positiver Minutenreserve*. Bachelorarbeit, Technische Universität Chemnitz
- [4] Rama Cont und Peter Tankov (2004): *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC, London

A Nebenrechnungen

Wegen der Unabhängigkeit des Poisson-Prozesses $(N_t, t \geq 0)$ und der Folge $(X_j)_{j \geq 1}$ lässt sich der Erwartungswert von (5) einfach berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\tilde{A}_t &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_t} (1 + X_j)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \sum_{j=1}^n (1 + X_j)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \sum_{j=1}^n (1 + X_j)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n (1 + X_j)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n) \sum_{j=1}^n (1 + \mathbb{E}X_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n) n (1 + \mathbb{E}X_1) \\
&= \mathbb{E}N_t(1 + \mathbb{E}X_1) = \lambda t \left(1 + \frac{p}{1-p}\right) = \lambda t \frac{1}{1-p}
\end{aligned} \tag{8}$$

Die Berechnung des Erwartungswertes der exakten Anzahl der Abrufe (4) ist hingegen schwieriger. Für die mittlere Abweichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{A}_t - A_t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{X_j} 1 - \mathbb{1}_{\{\tau_j + k\Delta t \leq t\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{X_j} \mathbb{1}_{\{\tau_j + k\Delta t > t\}}\right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n) \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_j = i) \sum_{k=1}^i \mathbb{P}(\tau_j + k\Delta t > t) \\
&= \exp(-\lambda t)(1-p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} p^i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \mathbb{P}(\tau_j + k\Delta t > t)
\end{aligned} \tag{9}$$

erhält man aus (9) folgende Abschätzung

$$0 \leq \mathbb{E}(\tilde{A}_t - A_t) \leq \mathbb{E}N_t \mathbb{E}X = \lambda t \frac{p}{1-p} \tag{10}$$

Ungleichung (10) zeigt deutlich, dass der Fehler, den man bei der Approximation der Intensität λ des Poisson-Prozesses mittels (7) begeht, für kleine p vernachlässigbar ist und für $p \approx 1$ groß werden kann, insbesondere dann, wenn λ vergleichsweise groß ist.