

# Über magische Quadrate und eine Wette

Bernd Luderer

*Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,  
09107 Chemnitz, Deutschland  
[bernd.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de](mailto:bernd.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de)*

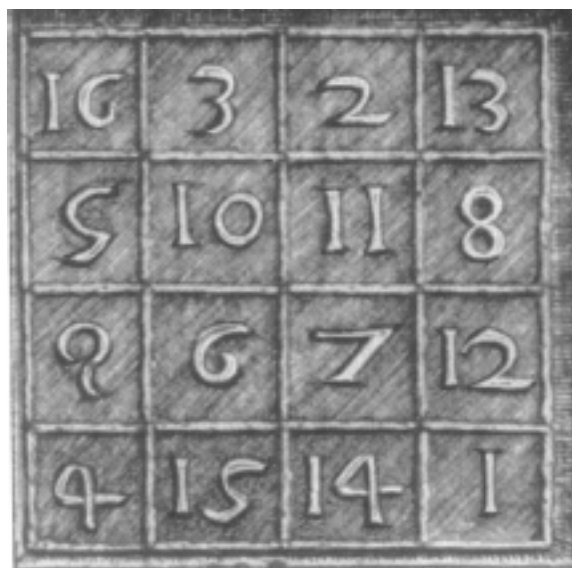
Im Oktober 2002 trat in der ZDF-Sendung „Wetten, dass ...?“ ein Kandidat mit folgendem Wettvorschlag an: „Ich wette, dass ich es schaffe, innerhalb von vier Minuten ein aus 16 Feldern bestehendes Quadrat derart mit voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen zu füllen, dass die vier Zeilensummen, die vier Spaltensummen und die Summen der beiden Diagonalen untereinander gleich und gleich einer (von einem Gast der Sendung) beliebig vorgegebenen sechsstelligen Zahl sind.“

Als Zahl wurde 216.784 vorgegeben. Der Kandidat gewann die Wette und beeindruckte die Zuschauer derart, dass er an diesem Abend sogar zum „Wettkönig“ gewählt wurde. Am nächsten Tag schrieben einige Zeitungen von Bluff und meinten, der Moderator sei hinter das Licht geführt worden. War das wirklich so? Natürlich steckt hinter der Wette ein gewisser Trick, der im Zusammenhang mit so genannten magischen Quadraten steht, doch bleibt noch genug an Kopfrechenarbeit übrig, um in der verhältnismäßig kurzen Zeit bestehen zu können.

Nachfolgend soll diskutiert werden, worauf die Lösung des Problems beruht und welche Rechenschritte erforderlich sind. Es zeigt sich, dass im Grunde genommen jeder diese Aufgabe lösen kann, wenn er nur über entsprechende Rechenfertigkeiten und genügend viel Zeit verfügt.

## Magische Quadrate

Bereits im Mittelalter bestand ein beliebtes Rätsel darin, so genannte magische Quadrate zu finden, d.h. quadratische Schemata von mindestens drei Zeilen und Spalten, in deren Felder voneinander verschiedene Zahlen auf eine solche Weise geschrieben werden, dass die  $n$  Zeilensummen, die  $n$  Spaltensummen und die beiden Summen der Diagonalreihen einander gleich sind. In der Regel werden gerade die ersten  $n^2$  natürlichen Zahlen verwendet, für  $n=4$  also die Zahlen 1, 2, ..., 16. Eines dieser magischen Quadrate, vielleicht das berühmteste überhaupt, findet sich als Detail auf dem Kupferstich „Melancholia“ von Albrecht Dürer (1471-1528) aus dem Jahre 1514:



Bemerkenswert am magischen Quadrat von Albrecht Dürer ist, dass nicht nur die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 34 ergeben, sondern auch die vier Ecken und die vier Zahlen im Zentrum. Ferner bilden die 15 und 14 in der 4. Zeile (die übrigens das Entstehungsjahr des Bildes dokumentieren) gemeinsam mit den gegenüberliegenden Zahlen 3 und 2 in der 1. Zeile ebenfalls die Summe 34. Analog ergänzen sich 9 und 5 in der 1. Spalte mit 8 und 12 in der 4. Spalte zu 34. Schließlich führen auch die aus den Zahlen 15, 12, 2, 5 sowie 14, 8, 3, 9 gebildeten Quadrate auf die Summe 34.

Selbstverständlich gibt es für  $n=4$  viele weitere magische Quadrate, z.B. das folgende:

14	1	12	7
11	8	13	2
5	10	3	16
4	15	6	9

Verwendet man die ersten 16 natürlichen Zahlen, so beträgt die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsumme (im Weiteren wird der Kürze halber stets nur von Zeilensumme gesprochen) offensichtlich 34, denn die Summe der Zahlen 1 bis 16 ergibt 136, aufgeteilt auf 4 Zeilen verbleiben 34. Dies ist die

„magische Zahl“ für  $n=4$ . Im Falle eines beliebigen  $n$  lautet die Zeilensumme  $S_n = \frac{n}{2} \cdot (n^2 + 1)$ .

Durch einfache Multiplikation jedes Feldes mit einem (ganzzahligen) Faktor  $F$  erhält man (verallgemeinerte) magische Quadrate, deren Zeilensumme ein Vielfaches der Zahl 34 beträgt (dabei sind die einzelnen Zahlen nach wie vor voneinander verschieden). Lassen sich nun auch magische Quadrate der Ordnung  $n=4$  konstruieren, deren Zeilensummen gleich einer beliebigen vorgegebenen Zahl  $Z > 34$  sind? Das ist auf relativ einfache Weise möglich, wenn das Ausgangsquadrat die zusätzliche Eigenschaft besitzt, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und auf beiden Diagonalen jede der Zahlen 13, 14, 15 oder 16 jeweils genau einmal vorkommt, wie es bei dem oben angegebenen magischen Quadrat der Fall ist. (Selbstverständlich lassen sich die nachfolgenden Konstruktionen auch mit Hilfe von vier anderen Zahlen durchführen, z.B. mit 1, 2, 3, 4, sofern sie dieselben Eigenschaften hinsichtlich des Auftretens in Zeilen, Spalten und Diagonalen aufweisen). Die Differenz zwischen der vorgegebenen Zahl  $Z$  und der bisherigen Summe 34 werde mit  $D$  bezeichnet:  $D=Z-34$ . Nun addiert man einfach die Zahl  $D$  zu jedem der Elemente 13, 14, 15, und 16. Da diese Zahlen in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen genau einmal vorkommen, erhöht sich deren Summe um die Zahl  $D$  und ergibt folglich gerade  $Z$ .

Ist die vorgegebene Zahl  $Z$  sehr groß, so wird auch  $D$  sehr groß, wodurch die Elemente 13, 14, 15, 16 in vier aufeinanderfolgende große Zahlen übergehen, während alle anderen Felder mit den Zahlen 1, 2, ..., 12 unverändert bleiben. Dadurch wäre der angewendete „Trick“ leicht durchschaubar. Man kann sich deshalb die zusätzliche Aufgabe stellen, die Zahlen, mit denen das magische Quadrat ausgefüllt wird, von der Größenordnung her vergleichbar zu wählen. Dazu können die beiden oben beschriebenen Ideen (Multiplikation aller Elemente mit einer Zahl bzw. Addition einer geeigneten Differenz zu vier ausgewählten Zahlen) miteinander kombiniert werden, wie im nachfolgenden Algorithmus beschrieben.

### **Konstruktion eines magischen Quadrates mit etwa gleich großen Zahlen**

Es wird das oben beschriebene Ausgangsquadrat verwendet; die vorgegebene „magische“ Zahl für die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsumme sei  $Z$ .

1. Finde einen Faktor  $F$  mit der Eigenschaft  $34F < Z$ .
2. Belege die Felder, die im Ausgangsquadrat den Zahlen 1, 2, ..., 12 entsprechen, mit den neuen Zahlen  $F, 2F, \dots, 12F$ .

3. Bilde den Ausdruck  $A=Z-20F$  und schreibe diesen in das linke obere Feld.
4. Belege die Felder, wo im Ausgangsquadrat die Zahlen 13, 15 bzw. 16 stehen, mit den neuen Zahlen  $A-F$ ,  $A+F$ ,  $A+2F$ .

### Erläuterungen zum Algorithmus

1. Die Zeilensumme im zu konstruierenden magischen Quadrat darf nicht größer als  $Z$  sein. Da die Zeilensumme im Ausgangsquadrat 34 beträgt, muss folglich  $34F < Z$  gelten.
2. Die den Zahlen 1, ..., 12 im Ausgangsquadrat entsprechenden Felder werden lediglich mit dem Faktor  $F$  multipliziert, ansonsten aber nicht verändert.
3. Damit nach Multiplikation mit  $F$  die vorgegebene Zeilensumme entsteht, muss in den Feldern, wo im Ausgangsquadrat 13, 14, 15 oder 16 steht, durch einen zusätzlichen Summanden ein Ausgleich geschaffen werden. Da die Summe der restlichen Felder der 1. Zeile (außer der linken Ecke) im Ausgangsquadrat 20 beträgt, und folglich im zu konstruierenden Quadrat  $20F$ , muss im linken oberen Feld der Rest  $A=Z-20F$  stehen.
4. Im Ausgangsquadrat unterscheiden sich die Zahlen 13, 15 bzw. 16 von der linken oberen Ecke 14 durch die Größen  $-1$ ,  $1$  bzw.  $2$ ; im zu konstruierenden Quadrat belaufen sich die Unterschiede daher auf  $-F$ ,  $F$  bzw.  $2F$ .

### Worauf hat der Kandidat zusätzlich zu achten?

Damit die Wette effektiv aussieht, ist es wichtig, dass jede einzelne Zahl „kompliziert“ aussieht und alle Zahlen etwa dieselbe Größenordnung aufweisen (natürlich wird sich die kleinste von der größten Zahl ungefähr um den Faktor 16 unterscheiden, da ja im Ausgangsquadrat die Zahlen von 1 bis 16 auftreten). Außerdem ist es notwendig, dass sich alle erforderlichen Rechenoperationen möglichst schnell und sicher im Kopf durchführen lassen. Ferner ist zu bedenken, dass der Kandidat die Zeilensumme  $Z$  vorher nicht kennt; er weiß lediglich, dass es sich vereinbarungsgemäß um eine sechsstellige Zahl handeln wird.



Foto: <http://bz.berlin1.de/aktuell/news/021008/wetten.html>

Die gegebene magische Zahl lautete in der Wette  $Z=216784$ . Der Kandidat wählte den Faktor  $F=4096$ , so dass die Differenz zur Berechnung der vier „markierten“ Felder  $D=Z-34F=77520$  betrug; Ausgangsquadrat ist das oben angegebene magische Quadrat (mit den „markierten“ Feldern 13, 14, 15, 16).

### Wie musste sich der Kandidat vorbereiten?

1. Er musste sich ein (beliebiges) magisches Ausgangsquadrat mit den Zahlen von 1 bis 16, das der Zusatzforderung genügt, in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen genau eines der Elemente 13, 14, 15, und 16 stehen zu haben, im Vorfeld der Wette sehr gut einprägen (im konkreten Fall wählte er das oben angegebene).
2. Er musste eine Anzahl von Faktoren F vorbereiten, mit denen – in Abhängigkeit von der gegebenen Zahl Z – die Ausgangszahlen multipliziert werden. Dabei muss zum einen  $34F < Z$  gelten, zum anderen sollte die Multiplikation (mittels Rechenvereinfachungen) schnell im Kopf möglich sein, zum dritten dürfen die Faktoren nicht zu „rund“ gewählt werden (damit die Zuschauer nicht sofort alles durchschauen). Es bieten sich z.B. folgende Faktoren an (selbstverständlich kann man auch ganz andere Faktoren wählen):
- 3.

Zeilensumme Z	Geeignete Faktoren F
100 000 ... 102 000	2901
102 000 ... 200 000	2998, 2999
200 000 ... 400 000	3999, 4096
400 000 ... 600 000	11001, 10011
600 000 ... 999 999	16999, 17001

4. Der Kandidat musste die Zahlen  $2F$ ,  $3F$ , ...,  $12F$  auswendig lernen oder in der Lage sein, diese schnell im Kopf zu berechnen. Ferner musste er die Differenz  $A=Z-20F$  schnell im Kopf berechnen können (was gute Kopfrechenfertigkeiten voraussetzt). Schließlich musste er es schaffen, die Ausdrücke  $A-F$ ,  $A+F$  und  $A+2F$  rasch zu berechnen und an entsprechender Stelle einzutragen.

### Literatur

Unter folgenden Internet-Adressen kann man mehr über magische Quadrate finden:

<http://www.theofel.de/magic/quadrat-generieren.html>

Es werden online (verallgemeinerte) magische Quadrate der Ordnungen 3 bis 51 generiert, wobei die kleinste Zahl und die Differenz aufeinanderfolgender Zahlen vorgegeben werden können.

[http://homepages.compuserve.de/AndyHumbert001/magische\\_quadraten.htm](http://homepages.compuserve.de/AndyHumbert001/magische_quadraten.htm)

Facharbeit über magische Quadrate, in der verschiedene Methoden zu deren Erzeugung beschrieben werden. Ein in PASCAL geschriebener Programmcode ist enthalten.

<http://www.rekordversuch.de/recordholders/de/records/magic.html>

Beschreibt die Regeln des Rekord-Klubs SAXONIA zur Konstruktion magischer Quadrate sowie die Weltrekorde seit 1975 bis heute.

<http://forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square.html>

Enthält viel Wissenswertes über magische Quadrate und ihre Geschichte (in englischer Sprache).