

# TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

## k-beste Lösungen unter Abstandsnebenbedingungen auf Graphen

M. Wappler

Preprint 2002-8



*Fakultät für Mathematik*

Thema:  $k$ -beste Lösungen unter Abstandsnebenbedingungen auf Graphen

**J A H R E S A R B E I T**

Technische Universität Chemnitz  
Fakultät für Mathematik

eingereicht von Markus Wappler  
geboren am 24. Januar 1977 in Annaberg-Buchholz

Betreuer: PD Dr. Walter Wenzel

Chemnitz, den 27. Juni 2002

## 0 Einführung

Bei der Behandlung diskreter Maximierungsprobleme sucht man gewöhnlich eine optimale Lösung. In verschiedenen Anwendungsfällen ist man aber an der Berechnung von  $k$  ( $k > 1$ ) besten Lösungen interessiert.

So kann es z.B. sein, dass sich gewisse Nebenbedingungen des Stammproblems schlecht spezifizieren lassen (oder erst später hinzukommen). Hier kann man sich helfen, indem man diese Nebenbedingungen weglässt oder vereinfacht, für das verbleibende (leichtere) Problem  $k$  beste Lösungen errechnet und unter diesen die beste, welche auch die zunächst ignorierten Bedingungen erfüllt, auswählt. Damit auch wirklich eine Lösung existiert, die alle Nebenbedingungen befriedigt, ist es günstig, wenn die  $k$  Alternativen einander nicht zu ähnlich sind.

Bei anderen Aufgabenstellungen ist es von vornherein vorgesehen, dass ein menschlicher Entscheider oder ein Entscheidungsmodul die Auswahl aus  $k$ -besten Lösungen eines untergeordneten Maximierungsproblems übernimmt, so beispielsweise bei der Zuordnung von DNS-Strängen, Automatischer-Sprach-Erkennung und Computerschach. Damit eine echte Auswahl stattfinden kann, ist es auch hier erwünscht, dass die Alternativen möglichst unterschiedlich sind. Von I. Althöfer stammt die Idee, einen Menschen zwischen zwei Zugvorschlägen eines Schachprogramms wählen zu lassen und so die Spielstärke des Programms wesentlich zu verbessern. Damit nicht in beiden Zugvorschlägen dieselben Schwachstellen des Programms zutage treten, sollten sich auch diese gut unterscheiden (siehe [1], [2], [3]).

Die Unähnlichkeit der  $k$  besten Lösungen wird durch einen Mindestabstand, den diese zueinander haben sollen, modelliert. Es entsteht ein diskretes Maximierungsproblem mit Abstandsnebenbedingungen.

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei die zu maximierende Funktion. Zusätzlich seien auf  $X$  eine Abstandsfunktion  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Mindestabstand  $d^* \in \mathbb{R}^+$  gegeben. Die Aufgabe besteht darin,  $k$  beste Lösungen  $x_1, \dots, x_k$  zu finden, für die  $d(x_i, x_j) \geq d^*$ , für alle  $1 \leq i < j \leq k$ , gilt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, zu spezifizieren, was "k beste Lösungen" bedeuten soll. Wir geben hier die drei folgenden Modelle an:

- (i)  $x_1$  ist beste Lösung auf  $X$ ;  
 $x_2$  ist beste Lösung auf  $\{x \in X : d(x, x_1) \geq d^*\}$ ;  
 $x_3$  ist beste Lösung auf  $\{x \in X : d(x, x_1) \geq d^*, d(x, x_2) \geq d^*\}$ ;  
...  
 $x_k$  ist beste Lösung auf  $\{x \in X : d(x, x_i) \geq d^* \text{ für } 1 \leq i \leq k-1\}$ .

- (ii) Maximiere  $\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k f(x_i)$ .

- (iii) Maximiere  $\min\{f(x_1), \dots, f(x_k)\}$ .

In [4] wurden einige Ergebnisse für bewertete Matroide im Fall  $k = 2$  erzielt.  $X$  ist das System der Basismengen eines Matroids und  $d(B_1, B_2) := \#(B_1 \setminus B_2) = \#(B_2 \setminus B_1)$ ,  $B_1, B_2 \in X$ . Diese Ergebnisse stehen in Beziehung mit der "M-Konvexitätstheorie", welche in [10],[11],[12] und [13] entwickelt wurde. Einige alternative Beweise

der Resultate aus [4] wurden in [14] gegeben. [5] weitete die Ergebnisse aus [4] auf bewertete  $\Delta$ -Matroide aus und betrachtete auch den Fall  $k \geq 3$ . Eine wesentliche Argumentationshilfe in [4] und [5] war der Basisgraph eines ( $\Delta$ -)Matroids. Die vorliegende Arbeit versucht die Grundlage für eine weitere Verallgemeinerung zu schaffen, indem sie sich auf Graphen konzentriert. Die Definition der Bewertung für Graphen rührt von ihrem Pendant für ( $\Delta$ -)Matroide her, ist aber allgemeiner (siehe Beispiel 1.3).

In Kapitel 1 beweisen wir einige Aussagen über bewertete Graphen. Kapitel 2 zeigt, dass für Hamming-Graphen lokale Suche, sowohl zur Findung des Maximums, als auch zur Findung einer zweitbesten Lösung mit einem vorgegebenen Abstand zum Maximum, funktioniert. Was heißt das? Wenn wir von einem beliebigen Startknoten ausgehend immer einen Nachbarknoten mit einer höchsten Bewertung wählen, so erreichen wir auf kürzestem Wege das Maximum. Geben wir uns nun  $d^*$  wie oben vor und wählen in jedem Schritt unter allen Nachbarknoten, die den Abstand zum Maximum vergrößern, einen mit höchstem Wert, so erreichen wir auf kürzestem Wege eine zweitbeste Lösung mit einem Abstand von mindestens  $d^*$  zum Maximum. In Theorem 2.11 und Folgerung 2.13 werden entsprechende Wege konstruiert. In Kapitel 3 stellen wir dar, wie Bewertungen von Würfeln aussehen.

## 1 Bewertete Graphen

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender (endlicher) Graph. Seien  $x, y \in V$ . Ihr Abstand  $d(x, y)$  ist die Länge eines kürzesten Weges von  $x$  nach  $y$  in  $G$ . Das Intervall  $\langle x, y \rangle$  definieren wir durch

$$\langle x, y \rangle := \{z \in V : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}. \quad (1.1)$$

$\langle x, y \rangle$  ist die Menge aller Punkte, die auf einem kürzesten Weg von  $x$  nach  $y$  liegen. Eine Funktion  $v : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  heißt Bewertung von  $G$ , falls gilt:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V, d(x, y) \geq 1 \exists \tilde{x}, \tilde{y} \in \langle x, y \rangle : \\ d(x, \tilde{x}) = d(y, \tilde{y}) = 1, \\ d(x, y) = d(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ v(x) + v(y) \leq v(\tilde{x}) + v(\tilde{y}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Beispiel 1.1**  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \langle x, y \rangle$ ,  $d(x, \tilde{x}) = d(y, \tilde{y}) = 1$ ,  $d(x, y) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 3$ . Siehe Abbildung 1. □

**Beispiel 1.2** Sei  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$ . Dann ist  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(1) = 0$ ,  $v(2) = 1$ ,  $v(3) = 3$ ,  $v(4) = 4$ ,  $v(5) = 5$ ,  $v(6) = 7$  eine Bewertung von  $G$ . Siehe Abbildung 2. □

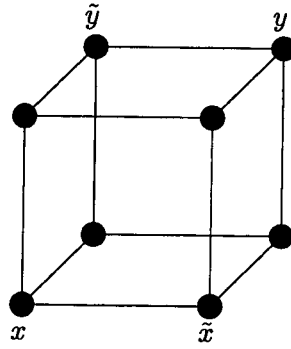


Abbildung 1: Beispiel 1.1

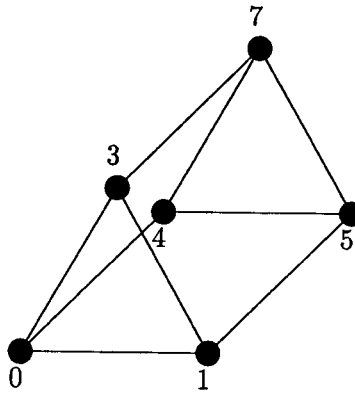


Abbildung 2: Beispiel 1.2

**Beispiel 1.3** Sei  $E$  eine endliche Menge,  $\mathcal{P}(E)$  ihre Potenzmenge und  $v : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  eine Funktion. Für  $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(E)$  definieren wir die symmetrische Differenz  $F_1 \Delta F_2 := (F_1 \cup F_2) \setminus (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{P}(E)$ . Das Paar  $M_v := (E, v)$  heißt bewertetes  $\Delta$ -Matroid, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (i)  $\exists F_0 \in \mathcal{P}(E) : v(F_0) \neq -\infty$ ,
- (ii) für alle  $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(E)$  mit  $v(F_1), v(F_2) \neq -\infty$  gilt  $\#F_1 \equiv \#F_2 \pmod{2}$ ,
- (iii) für  $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(E)$  mit  $v(F_1), v(F_2) \neq -\infty$  und  $e \in F_1 \Delta F_2$  gibt es ein  $f \in (F_1 \Delta F_2) \setminus \{e\}$  mit  $v(F_1) + v(F_2) \leq v(F_1 \Delta \{e, f\}) + v(F_2 \Delta \{e, f\})$ .

Seien

$$\mathcal{F} := \{F \in \mathcal{P}(E) : \#F \equiv \#F_0 \pmod{2}\},$$

$$\mathcal{E} := \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathcal{F}, \#(F_1 \Delta F_2) = 2\}.$$

Dann ist  $v|_{\mathcal{F}}$  eine Bewertung für den Graphen  $G = (\mathcal{F}, \mathcal{E})$ .

Wir möchten anmerken, dass (iii) strenger als unsere Definition der Bewertung, aber in ihr enthalten, ist. □

Im weiteren sei  $v : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  eine Bewertung von  $G$ . Als erstes zeigen wir, dass ein lokales Maximum von  $v$  mit endlichem Wert auch ein globales Maximum von  $v$  ist. Dies sichert, dass die lokale Suche nach einem Maximum auf jeden Fall ein globales Maximum findet.

**Satz 1.4** Sei  $x \in V$ ,  $v(x) \neq -\infty$ , und es gelte  $v(x) \geq v(y)$ ,  $\forall y \in V$  mit  $d(x, y) = 1$ . Dann gilt  $v(x) \geq v(y)$ ,  $\forall y \in V$ .

**Beweis.** Wir führen Induktion nach  $d(x, y)$  durch. Der Fall  $d(x, y) = 1$  gilt nach Voraussetzung. Es sei  $d(x, y) \geq 2$ . Nach (1.2) wählen wir  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \langle x, y \rangle$  mit

$$\begin{aligned} d(x, \tilde{x}) &= d(y, \tilde{y}) = 1, \\ d(x, y) &= d(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ v(x) + v(y) &\leq v(\tilde{x}) + v(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Wegen  $\tilde{y} \in \langle x, y \rangle$  und  $d(y, \tilde{y}) = 1$  gilt nach (1.1) auch  $d(x, \tilde{y}) = d(x, y) - 1$  und damit nach Induktionsvoraussetzung  $v(x) \geq v(\tilde{y})$ . Wegen  $v(x) \neq -\infty$  erhalten wir  $v(y) \leq v(\tilde{x}) \leq v(x)$ . □

**Beispiel 1.5** Die Behauptung aus Satz 1.4 gilt nicht für  $v(x) = -\infty$ , wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}, \\ v(1) &= -\infty, \quad v(2) = -\infty, \quad v(3) = 0, \quad v(4) = -\infty. \end{aligned}$$

1 ist lokales aber nicht globales Maximum. Siehe Abbildung 3. □

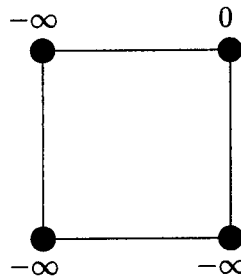


Abbildung 3: Beispiel 1.5

Als nächstes zeigen wir, dass ein globales Maximum von  $v$  einen Nachbarn besitzt, der eine zweitbeste Lösung ist:

**Satz 1.6** *Es sei  $|V| \geq 2$  und  $x \in V$  erfülle  $v(x) \geq v(y), \forall y \in V$ . Dann gibt es ein  $\tilde{x} \in V$  mit  $d(x, \tilde{x}) = 1$  und  $v(\tilde{x}) \geq v(y), \forall y \in V \setminus \{x\}$ .*

**Beweis.** Sei o.B.d.A.  $v(x) \neq -\infty$ . Wir wählen  $z \in V$  mit  $v(z) \geq v(y), \forall y \neq x$ . Ist  $d(x, z) = 1$ , so ist nichts zu zeigen. Es sei  $d(x, z) \geq 2$ . Nach (1.2) existieren  $\tilde{x}, \tilde{z} \in \langle x, z \rangle$  mit

$$\begin{aligned} d(x, \tilde{x}) &= d(z, \tilde{z}) = 1, \\ d(x, z) &= d(\tilde{x}, \tilde{z}), \\ v(x) + v(z) &\leq v(\tilde{x}) + v(\tilde{z}). \end{aligned}$$

Aus  $v(x) \geq v(\tilde{z})$  folgt

$$v(x) + v(z) \leq v(\tilde{x}) + v(\tilde{z}) \leq v(\tilde{x}) + v(x).$$

Wegen  $v(x) \neq -\infty$  haben wir damit  $v(z) \leq v(\tilde{x})$ , und es gilt  $v(\tilde{x}) = v(z) \geq v(y), \forall y \neq x$ .  $\square$

Seien  $x, y \in V$ . Ein (kürzester)  $x$ - $y$ -Weg  $P = (z_0 = x, \dots, z_n = y)$  heißt Gipfelweg, wenn

$$\begin{aligned} d(x, y) &= n, \\ \exists i, 0 \leq i \leq n \text{ mit} & \\ v(z_0) &\leq \dots \leq v(z_i), \\ v(z_i) &\geq \dots \geq v(z_n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

**Lemma 1.7** *Es seien  $x, y \in V$ . Dann existiert ein Gipfelweg zwischen  $x$  und  $y$ .*

**Beweis.** Wir führen Induktion nach  $d(x, y)$  durch. Für  $d(x, y) = 1$  ist die Behauptung klar. Es sei  $d(x, y) = 2$ . Nach (1.2) gibt es  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \langle x, y \rangle$  mit

$$\begin{aligned} d(x, \tilde{x}) &= d(y, \tilde{y}) = 1, \\ d(x, y) &= d(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ v(x) + v(y) &\leq v(\tilde{x}) + v(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Damit ist  $v(\tilde{x}) \geq v(x)$  oder  $v(\tilde{y}) \geq v(y)$ . O.B.d.A. sei  $v(\tilde{x}) \geq v(x)$ . Dann ist  $(x, \tilde{x}, y)$  ein gesuchter Gipfelweg. Es sei  $d(x, y) \geq 3$ . Analog zum Fall  $d(x, y) = 2$  finden wir o.B.d.A. ein  $\tilde{x} \in \langle x, y \rangle$  mit  $d(x, \tilde{x}) = 1, d(\tilde{x}, y) = d(x, y) - 1, v(\tilde{x}) \geq v(x)$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Gipfelweg  $P' = (\tilde{x}, \dots, y)$ . Der Weg  $P = xP' = (x, \tilde{x}, \dots, y)$  ist nun ein Gipfelweg zwischen  $x$  und  $y$ .  $\square$

Als wichtiges Ergebnis schließen wir hieraus, dass zwei Ecken mit endlichen Werten nicht durch  $-\infty$ -bewertete Ecken getrennt werden können:

**Folgerung 1.8** *Seien  $x, y \in V, v(x), v(y) \neq -\infty$ . Dann gibt es einen kürzesten  $x$ - $y$ -Weg  $P = (z_0 = x, \dots, z_n = y)$  mit  $v(z_i) \neq -\infty$ , für alle  $0 \leq i \leq n$ .*

## 2 Bewertete Hamming-Graphen

Um die Hauptaussagen beweisen zu können, schränken wir uns an dieser Stelle auf Hamming-Graphen ein. Auf ihnen lassen sich gewisse Parallelitätseigenschaften von gerichteten Kanten ausnutzen.

Seien  $K_{m_j} = (V_j, E_j)$ ,  $m_j > 1$ ,  $|V_j| = m_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  vollständige Graphen,

$$V := V_1 \times \dots \times V_n. \quad (2.1)$$

Für ein  $x \in V$  soll im weiteren  $x^j$  die  $j$ -te Komponente bezeichnen. Für  $x, y \in V$  ist der Hamming-Abstand  $h(x, y)$  folgendermaßen gegeben:

$$h(x, y) := |\{j : x^j \neq y^j, 1 \leq j \leq n\}|. \quad (2.2)$$

Wir definieren noch

$$E := \{\{x, y\} : x, y \in V, h(x, y) = 1\}. \quad (2.3)$$

Der Graph  $H = K_{m_1} \times \dots \times K_{m_n} := (V, E)$  heißt Hamming-Graph.

**Beispiel 2.1**  $H = K_3 \times K_2$ ,  $V = \{(x^1, x^2) : x^1 \in \{0, 1, 2\}, x^2 \in \{0, 1\}\}$ ,  $E = \{\{(x^1, x^2), (y^1, y^2)\} : x^1 = y^1, x^2 \neq y^2 \text{ oder } x^1 \neq y^1, x^2 = y^2\}$ . Siehe Abbildung 4.  $\square$

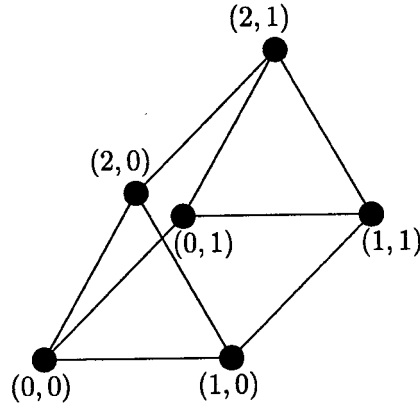


Abbildung 4:  $H = K_3 \times K_2$

Aus (2.2) und (2.3) folgt direkt

**Lemma 2.2** Für  $x, y \in V$  ist  $d(x, y) = h(x, y)$ .

**Folgerung 2.3** Es seien  $x, y \in V$ . Es gilt  $z \in \langle x, y \rangle$  genau dann, wenn  $z^j = x^j$  oder  $z^j = y^j$ , für alle  $1 \leq j \leq n$  ist.



Ein ( $n$ -dimensionaler) Würfel ist ein Hamming-Graph, für den  $H = K_{m_1} \times \dots \times K_{m_n} = K_2 \times \dots \times K_2$  gilt. Wir bezeichnen ihn mit  $W_n$ .

**Beispiel 2.4**  $W_3 = K_2 \times K_2 \times K_2$ ,  $V = \{(x^1, x^2, x^3) : x^1, x^2, x^3 \in \{0, 1\}\}$ ,  $E = \{((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3)) : |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2| + |x^3 - y^3| = 1\}$ . Siehe Abbildung 5.

□

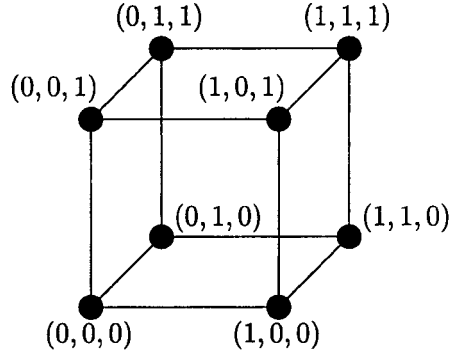


Abbildung 5:  $H = K_2 \times K_2 \times K_2$

Im folgenden betrachten wir allgemeine Hamming-Graphen  $H = (V, E)$ . Aus (2.2), (2.3), Lemma 2.2 und Folgerung 2.3 ergibt sich unmittelbar:

**Lemma 2.5** *Es seien  $x, y \in V$  und  $d(x, y) = m > 0$ . Dann ist der von  $\langle x, y \rangle$  in  $H$  aufgespannte Untergraph isomorph zu  $W_m$ .*

Seien  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in V$ . Wir nennen die Paare  $(x, \tilde{x})$  und  $(y, \tilde{y})$  parallel und schreiben  $x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$ , wenn

$$\begin{aligned} &\exists j_0, 1 \leq j_0 \leq n, \text{ so dass} \\ &x^j = \tilde{x}^j, y^j = \tilde{y}^j, \forall j \neq j_0, \\ &x^{j_0} \neq \tilde{x}^{j_0}, y^{j_0} \neq \tilde{y}^{j_0}, \\ &x^{j_0} = y^{j_0}, \tilde{x}^{j_0} = \tilde{y}^{j_0}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Beispiel 2.6**  $x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$ . Siehe Abbildung 6.

□

Die Parallelität definiert auf der Menge aller Paare  $(x, y) \in V^2$  mit  $d(x, y) = 1$  eine Äquivalenzrelation. Direkt aus (2.4) und Folgerung 2.3 erhalten wir

**Lemma 2.7** *Es seien  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in V$ ,  $x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$ . Dann gelten  $\tilde{x}, y \in \langle x, \tilde{y} \rangle$  und  $x, \tilde{y} \in \langle \tilde{x}, y \rangle$ .*

Im folgenden sei  $v : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  eine Bewertung von  $H$ .

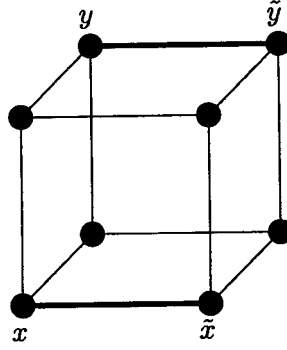


Abbildung 6:  $x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$

**Lemma 2.8** *Es seien  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in V$ ,  $x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$  und  $v(x), v(y) \neq -\infty$ . Dann gilt  $v(\tilde{x}) - v(x) = v(\tilde{y}) - v(y)$ .*

**Beweis.** Wir führen Induktion nach  $d(x, y)$  durch. Für  $x = y$  ist die Behauptung offensichtlich erfüllt.

Wir wählen  $x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$  mit  $d(x, y) = 1$ . Dann ist  $\langle x, \tilde{y} \rangle = \langle \tilde{x}, y \rangle = \{x, \tilde{x}, y, \tilde{y}\}$ . Folglich haben wir

$$\begin{aligned} v(x) + v(\tilde{y}) &\leq v(\tilde{x}) + v(y) \text{ und} \\ v(\tilde{x}) + v(y) &\leq v(x) + v(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Es sei  $d(x, y) > 1$ . Entsprechend (2.4) sei  $j_0$  der Index, für den

$$\begin{aligned} x^j &= \tilde{x}^j, y^j = \tilde{y}^j, \forall j \neq j_0, \\ x^{j_0} &\neq \tilde{x}^{j_0}, y^{j_0} \neq \tilde{y}^{j_0}, \\ x^{j_0} &= y^{j_0}, \tilde{x}^{j_0} = \tilde{y}^{j_0} \end{aligned}$$

sind. Nach Folgerung 1.8 existiert ein kürzester  $x$ - $y$ -Weg  $P = (z_0 = x, \dots, z_m = y)$  mit  $v(z_i) \neq -\infty$ , für alle  $0 \leq i \leq m$ . Nach Folgerung 2.3 ist  $z_1^{j_0} = x^{j_0} = y^{j_0}$ . Wir setzen

$$\tilde{z}_1^j := \begin{cases} \tilde{x}^{j_0} & , j = j_0 \\ z_1^j & , j \neq j_0. \end{cases}$$

Damit sind  $x\tilde{x} \parallel z_1\tilde{z}_1 \parallel y\tilde{y}$ ,  $d(x, z_1) = 1$ ,  $d(z_1, y) = d(x, y) - 1$ . Es ergibt sich

$$v(\tilde{x}) - v(x) = v(\tilde{z}_1) - v(z_1) = v(\tilde{y}) - v(y).$$

□

Wir können nun beweisen, dass für zwei Ecken mit endlichen Bewertungen der nach Lemma 2.5 von ihnen aufgespannte Würfel ebenfalls nur endliche Werte enthält:

**Satz 2.9** Seien  $x, y \in V$ ,  $v(x), v(y) \neq -\infty$ . Dann ist  $v(w) \neq -\infty, \forall w \in \langle x, y \rangle$ .

**Beweis.** Für  $d(x, y) \leq 1$  haben wir nichts zu zeigen. Es sei deshalb  $d(x, y) \geq 2$ . Nach Folgerung 1.8 existiert ein kürzester  $x$ - $y$ -Weg  $P = (z_0 = x, z_1, \dots, z_m = y)$  mit  $v(z_i) \neq -\infty$ , für alle  $0 \leq i \leq m$ . Da  $P$  ein kürzester Weg ist, gilt nach Folgerung 2.3, dass  $z_i^j = x^j$  oder  $z_i^j = y^j$ , für alle  $0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  ist.

Sei  $w \in \langle x, y \rangle$ . Wir führen Induktion nach  $d(x, w)$  durch. Sei  $d(x, w) = 1$ . Sei  $j_0$  der Index, für den gilt:

$$\begin{aligned} x^j &= w^j, \forall j \neq j_0, \\ x^{j_0} &\neq w^{j_0} = y^{j_0}. \end{aligned}$$

Offenbar gibt es ein  $0 \leq i_0 < m$  so, dass  $z_{i_0}^{j_0} = x^{j_0}, z_{i_0+1}^{j_0} = y^{j_0}$  ist. Somit haben wir  $xw \parallel z_{i_0}z_{i_0+1}$ . Nach Lemma 2.8 erhalten wir  $v(w) \neq -\infty$ .

Sei  $d(x, w) \geq 2$ . Wir wählen  $1 \leq j_0 \leq n$  so, dass  $x^{j_0} \neq w^{j_0} = y^{j_0}$  gilt. Nun definieren wir

$$\tilde{w}^j := \begin{cases} x^{j_0} & , j = j_0 \\ w^j & , j \neq j_0. \end{cases}$$

Wir haben damit  $d(x, \tilde{w}) = d(x, w) - 1$  und somit nach Induktionsvoraussetzung  $v(\tilde{w}) \neq -\infty$ . Wie oben finden wir ein  $0 \leq i_0 < m$ , so dass  $\tilde{w}w \parallel z_{i_0}z_{i_0+1}$  ist. Wir erhalten  $v(w) \neq -\infty$ . □

Für das weitere definieren wir die Sphäre  $S(x_0, d)$  als Menge aller Punkte, die von  $x_0$  den Abstand  $d$  haben und  $M_v(x_0, d) \subseteq S(x_0, d)$  als Menge aller Punkte, die bezüglich  $S(x_0, d)$  eine maximale Bewertung haben. Siehe Abbildung 7.

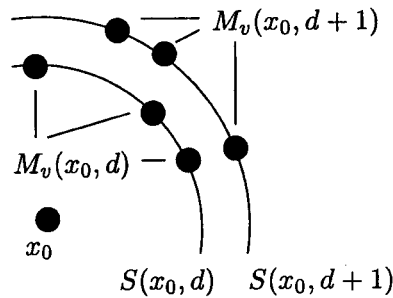


Abbildung 7:  $S(x_0, d), M_v(x_0, d)$

Sei  $x_0 \in V$ . Wir definieren für  $0 \leq d \leq n$

$$\begin{aligned} S(x_0, d) &:= \{x \in V : d(x_0, x) = d\}, \\ M_v(x_0, d) &:= \{x \in S(x_0, d) : v(x) \geq v(y), \forall y \in S(x_0, d)\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Satz 2.10 zeigt direkt, dass die lokale Suche nach einem Maximum auf kürzestem Wege ein solches erreicht und zusammen mit Folgerung 2.12, dass die lokale Suche nach einer zweitbesten Lösung mit Mindestabstand zum Maximum ebenfalls auf kürzestem Wege ein solches erreicht.

**Satz 2.10** Sei  $x_0 \in V$ . Seien  $x \in M_v(x_0, d)$ ,  $y \in M_v(x_0, d + 1)$ ,  $0 \leq d < n$  und  $v(x), v(y) \neq -\infty$ . Dann existieren  $\tilde{x} \in M_v(x_0, d + 1)$ ,  $\tilde{y} \in M_v(x_0, d)$  mit  $d(x, \tilde{x}) = d(y, \tilde{y}) = 1$ .

**Beweis.** Wegen  $x \in S(x_0, d)$  und  $y \in S(x_0, d + 1)$  gibt es ein  $1 \leq j_0 \leq n$  mit  $x^{j_0} = x^{j_0} \neq y^{j_0}$ . Wir setzen

$$\tilde{x}^j := \begin{cases} y^{j_0} & , j = j_0 \\ x^j & , j \neq j_0, \end{cases} \quad \tilde{y}^j := \begin{cases} x^{j_0} & , j = j_0 \\ y^j & , j \neq j_0. \end{cases}$$

Wir erhalten  $\tilde{x} \in S(x_0, d + 1)$ ,  $\tilde{y} \in S(x_0, d)$  und  $x\tilde{x} \parallel \tilde{y}y$ . Aus Lemma 2.7 erhalten wir  $\tilde{x}, \tilde{y} \in (x, y)$  und aus Satz 2.9 schließlich  $v(\tilde{x}), v(\tilde{y}) \neq -\infty$ . Außerdem haben wir

$$v(\tilde{x}) - v(x) = v(y) - v(\tilde{y}).$$

Wegen  $\tilde{x} \in S(x_0, d + 1)$ ,  $\tilde{y} \in S(x_0, d)$  gilt  $v(x) \geq v(\tilde{y})$ ,  $v(y) \geq v(\tilde{x})$ , und wir erhalten letztendlich  $v(x) = v(\tilde{y})$ ,  $v(y) = v(\tilde{x})$ . □

Folgendes Theorem 2.11, das ganz wesentlich auf Satz 2.10 aufbaut, ist die zentrale Aussage dieser Arbeit.

**Theorem 2.11** Sei  $x_0 \in V$ .  $x^* \in V$  sei Maximum, d.h.  $v(x^*) \geq v(x)$ ,  $\forall x \in V$ . Sei  $D := d(x_0, x^*)$ . Dann gibt es einen Weg  $(x_0, x_1, \dots, x_D, \dots, x_n)$  mit  $x_d \in M_v(x_0, d)$ , für alle  $0 \leq d \leq n$ .

**Beweis.** Wir setzen  $x_D := x^*$ . Für  $v(x_D) = -\infty$  ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Sei deshalb  $v(x_D) \neq -\infty$ . Wir wählen für  $i = D, D - 1, \dots, 1$  rekursiv  $x_{i-1} \in M_v(x_0, i - 1)$ ,  $d(x_{i-1}, x_i) = 1$ . Ist  $v(x_i) \neq -\infty$ , so können wir das nach Satz 2.10 tun. Ist  $v(x_i) = -\infty$ , so gilt  $v(x) = -\infty$ ,  $\forall x \in S(x_0, i - 1)$ , da andernfalls kein  $x$ - $x_D$ -Gipfelweg existieren würde. Da ein  $x_0$ - $x_i$ -Weg existieren muss, gibt es ein  $x_{i-1} \in S(x_0, i - 1)$ ,  $d(x_{i-1}, x_i) = 1$ . Analog finden wir auch  $x_i \in M_v(x_0, i)$ ,  $d(x_{i-1}, x_i) = 1$  für  $D < i \leq n$ . □

**Folgerung 2.12** Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.11 ist die Funktion  $g : \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $g(d) := v(x_d)$ ,  $0 \leq d \leq n$  konkav, d.h.

$$v(x_d) \geq \frac{1}{2} \cdot (v(x_{d-1}) + v(x_{d+1})), \quad 0 < d < n \quad (2.6)$$

oder allgemeiner

$$v(x_d) \geq \frac{f-d}{f-e} \cdot v(x_e) + \frac{d-e}{f-e} \cdot v(x_f), \quad 0 \leq e < d < f \leq n. \quad (2.7)$$

**Beweis.** (2.7) ergibt sich aus (2.6). Es genügt also, (2.6) zu zeigen. Sei  $0 < d < n$ . Da  $d(x_{d-1}, x_{d+1}) = 2$  ist, gibt es nach (1.2)  $z, \tilde{z} \in V$  mit

$$\begin{aligned} d(x_0, z) &= d(x_0, \tilde{z}) = d, \\ v(x_{d-1}) + v(x_{d+1}) &\leq v(z) + v(\tilde{z}). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$v(x_{d-1}) + v(x_{d+1}) \leq v(z) + v(\tilde{z}) \leq 2 \cdot v(x_d).$$

□

Aus Theorem 2.11 ergibt sich für den Spezialfall  $x_0 = x^*$ :

**Folgerung 2.13** *Es sei  $x_0 \in V$ ,  $v(x_0) \geq v(x)$ ,  $\forall x \in V$ . Dann gibt es einen Weg  $(x_0, \dots, x_n)$  in  $H$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $d(x_0, x_d) = d$ , für alle  $0 \leq d \leq n$ ,
- (ii)  $v(x_d) \geq v(x)$ ,  $\forall x \in V : d(x_0, x) \geq d$ .

### 3 Bewertete Würfel

Wir betrachten in diesem Kapitel  $W_n = (V, E)$ . Ziel ist es, alle Bewertungen von  $W_n$  zu klassifizieren.

**Satz 3.1** *Es existiere wenigstens ein  $\tilde{z} \in V$  mit  $v(\tilde{z}) \neq -\infty$ . Dann gibt es  $x, y \in V$ , so dass*

- (i)  $v(z) \neq -\infty$ ,  $z \in \langle x, y \rangle$ ,
- (ii)  $v(z) = -\infty$ ,  $z \notin \langle x, y \rangle$ .

**Beweis.** Wir wählen  $x, y \in V$ ,  $v(x), v(y) \neq -\infty$ , so dass  $d(x, y)$  maximal ist. Wir zeigen nun, dass  $x$  und  $y$  die Behauptungen erfüllen. (i) ist die Aussage von Satz 2.9.

Sei  $z \notin \langle x, y \rangle$ . Nach Folgerung 2.3 gibt es ein  $1 \leq j_0 \leq n$  mit  $x^{j_0} \neq z^{j_0} \neq y^{j_0}$ . Da wir aber einen Würfel betrachten, gilt  $x^{j_0} = y^{j_0}$ . Wir definieren

$$\tilde{y}^j := \begin{cases} z^{j_0} & , j = j_0 \\ y^j & , j \neq j_0 \end{cases}$$

und erhalten  $d(x, \tilde{y}) = d(x, y) + 1$ ,  $\tilde{y} \in \langle z, y \rangle$ . Wäre nun  $v(z) \neq -\infty$ , so ergäbe Satz 2.9, dass  $v(\tilde{y}) \neq -\infty$  ist, mit Widerspruch zur maximalen Wahl von  $d(x, y)$ .

□

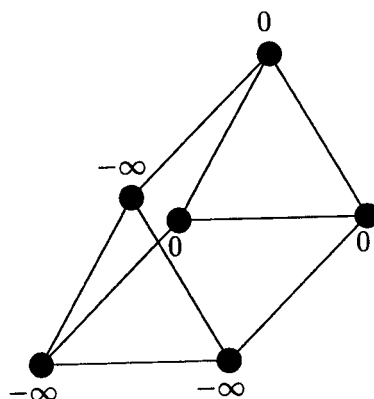


Abbildung 8: Beispiel 3.2

**Beispiel 3.2** Die Aussage von Satz 3.1 lässt sich nicht auf Hamming-Graphen verallgemeinern, wie das Gegenbeispiel in Abbildung 8 zeigt.  $\square$

Wir können uns also auf die Untersuchung von Würfeln mit endlichen Werten beschränken. Für eine Bewertung  $v$  gelte im weiteren also  $v(V) \subset \mathbb{R}$ .

Wir identifizieren im weiteren  $V$  mit  $\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^j \in \{0, 1\}, \text{ für alle } 1 \leq j \leq n\}$ . Außerdem sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Einheitsbasis des  $\mathbb{R}^n$  und  $0 := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  das Nullelement.

**Satz 3.3** Sei  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $v$  ist eine Bewertung von  $W_n$ ,
- (ii)  $v(x) - v(\tilde{x}) = v(y) - v(\tilde{y}), \forall x\tilde{x} \parallel y\tilde{y}$ ,
- (iii)  $v(x) = v(0) + \sum_{j=1}^n x^j \cdot (v(e_j) - v(0)), \forall x \in V$ .

**Beweis.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) : folgt aus Lemma 2.8.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Seien  $x, y \in V, d(x, y) \geq 1$ . Sei  $j_0, 1 \leq j_0 \leq n$  ein Index mit  $x^{j_0} \neq y^{j_0}$ . Wir definieren

$$\tilde{x}^j := \begin{cases} y^{j_0} & , j = j_0 \\ x^j & , j \neq j_0, \end{cases} \quad \tilde{y}^j := \begin{cases} x^{j_0} & , j = j_0 \\ y^j & , j \neq j_0. \end{cases}$$

Wir haben  $x\tilde{x} \parallel \tilde{y}y$  und damit  $v(x) + v(y) = v(\tilde{x}) + v(\tilde{y})$ . Es gilt (1.2).

(i)  $\Rightarrow$  (iii) : Sei  $x \in V$ . Es ist  $x = \sum_{j=1}^n x^j \cdot e_j$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} y_0 &:= 0, \\ y_1 &:= y_0 + x^1 \cdot e_1, \\ y_2 &:= y_1 + x^2 \cdot e_2, \\ &\vdots \\ y_n &:= y_{n-1} + x^n \cdot e_n = x. \end{aligned}$$

Wenn  $x^j \neq 0$  ist für ein  $0 < j \leq n$ , so haben wir  $y_{j-1}y_j \parallel 0e_j$ . Aus Lemma 2.8 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} v(y_1) - v(y_0) &= x^1 \cdot (v(e_1) - v(0)), \\ v(y_2) - v(y_1) &= x^2 \cdot (v(e_2) - v(0)), \\ &\vdots \\ v(y_n) - v(y_{n-1}) &= x^n \cdot (v(e_n) - v(0)). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} v(x) - v(0) &= v(y_n) - v(y_0) \\ &= (v(y_n) - v(y_{n-1})) + (v(y_{n-1}) - v(y_{n-2})) + \dots + (v(y_1) - v(y_0)) \\ &= \sum_{j=1}^n x^j \cdot (v(e_j) - v(0)). \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : Seien  $x, y \in V$ ,  $d(x, y) \geq 1$ . Wir wählen  $\tilde{x}, \tilde{y}$  wie in (ii)  $\Rightarrow$  (i). Es ist

$$v(x) + v(y) = 2 \cdot v(0) + \sum_{j=1}^n (x^j + y^j) \cdot (v(e_j) - v(0)) = v(\tilde{x}) + v(\tilde{y}).$$

□

**Folgerung 3.4** *Es seien  $v_* := \min\{v(x) : x \in V\}$  und  $v^* := \max\{v(x) : x \in V\}$ . Dann gibt es  $x_*, x^* \in V$ , so dass  $v(x_*) = v_*$ ,  $v(x^*) = v^*$  und  $d(x_*, x^*) = n$  ist. Weiterhin gilt  $v(x^*) - v(x_*) = \sum_{j=1}^n |v(e_j) - v(0)|$ .*

Eine Bewertung wird umkehrbar eindeutig durch die Werte von  $n+1$  affin unabhängigen Ecken bestimmt:

**Satz 3.5** *Sei  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset V$  eine affine Basis des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}$ . Dann gibt es genau eine Bewertung  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  von  $W_n$  mit  $v(x_i) = v_i$ , für alle  $0 \leq i \leq n$ .*

**Beweis.** Wenn  $\{x_0, \dots, x_n\} = \{0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ist, so liefert uns Satz 3.3, (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) die Behauptung.

Sei nun  $\{x_0, \dots, x_n\}$  beliebig. Für eine Bewertung  $v$ , die die Behauptung erfüllt, müsste nach Satz 3.3 für alle  $1 \leq i \leq n$

$$v_i - v_0 = \sum_{j=1}^n (x_i^j - x_0^j) \cdot (v(e_j) - v(0))$$

gelten. Da  $\{x_0, \dots, x_n\}$  affin unabhängig ist, ist  $[(x_i - x_0)^j]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine nichtsinguläre Matrix. Mit ihrer Inversen Matrix ergeben sich  $v(e_j) - v(0)$  für alle  $1 \leq j \leq n$  eindeutig aus  $v_0, \dots, v_n$ . Da aber ebenfalls nach Satz 3.3

$$v(0) = v_0 - \sum_{j=1}^n x_0^j \cdot (v(e_j) - v(0))$$

ist, erhalten wir  $v(0), v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_n)$  eindeutig aus  $v_0, \dots, v_n$ . Somit sind durch  $\{v_0, \dots, v_n\}$  auch die Werte von  $\{0, e_1, \dots, e_n\}$  eindeutig bestimmt. Deshalb gibt es genau eine Bewertung  $v$ , für die  $v(x_i) = v_i$  für alle  $0 \leq i \leq n$  gilt.  $\square$

Wir wollen Bewertungen von  $W_n$  als im wesentlichen gleich ansehen, wenn sie durch eine bijektive affine Transformation und durch eine Kongruenzabbildung des Würfels auf sich auseinander hervorgehen. Zu diesem Zweck definieren wir auf der Menge aller reellwertigen Bewertungen von  $W_n$  die folgende Äquivalenzrelation: Wir schreiben

$$v \sim \tilde{v}, \text{ wenn } \tilde{v}(x) = C \cdot v(T^{-1}x) + D, \forall x \in V, \quad (3.1)$$

wobei  $C \in \mathbb{R}^+$ ,  $D \in \mathbb{R}$  Konstanten und  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kongruenzabbildung mit  $T(V) = V$  sein sollen. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $\mathcal{V}$ , ihre Elemente mit  $[v]$ , wobei  $v$  ein Repräsentant der jeweiligen Klasse ist.

Wir können genau angeben, wie  $\mathcal{V}$  aussieht und haben damit im wesentlichen die Menge aller Bewertungen von  $W_n$  beschrieben:

**Satz 3.6**  $\mathcal{V}$  entspricht umkehrbar eindeutig der Menge  $\{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n, \sum_{i=1}^n v_i \in \{0, 1\}\}$ .

**Beweis.** Sei  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bewertung von  $W_n$ . Nach Folgerung 3.4 seien  $x_*, x^* \in V$ , so dass  $v(x_*) \leq v(x) \leq v(x^*)$ ,  $\forall x \in V$  und  $d(x_*, x^*) = n$ . Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kongruenzabbildung mit  $T(V) = V$ ,  $T(x_*) = 0$  und  $v(T^{-1}e_1) \leq v(T^{-1}e_2) \leq \dots \leq v(T^{-1}e_n)$ . Wir setzen

$$C := \begin{cases} 1/(v(x^*) - v(x_*)) & , v(x_*) \neq v(x^*) \\ 1 & , v(x_*) = v(x^*), \end{cases}$$

$$D := -C \cdot v(x_*),$$

$$\tilde{v}(x) := C \cdot v(T^{-1}x) + D.$$

Außerdem setzen wir noch  $v_i := \tilde{v}(e_i)$  für  $1 \leq i \leq n$ . Nach Definition von  $\tilde{v}$  und Folgerung 3.4 erhalten wir

$$0 = \tilde{v}(0) \leq \tilde{v}(x) \leq \tilde{v}((1, \dots, 1)) \in \{0, 1\}, \forall x \in V,$$

$$0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n.$$



Folgerung 3.4 ergibt somit  $\sum_{i=1}^n v_i \in \{0, 1\}$ . Die auf diese Weise definierte Zuordnung  $v \mapsto (v_1, \dots, v_n)$  ist eindeutig und verträglich mit  $\sim$ . Damit ist die Abbildung  $[v] \mapsto (v_1, \dots, v_n)$  korrekt definiert und nach Satz 3.5 bijektiv. □

## Literatur

- [1] I. Althöfer, *A symbiosis of man and machine beats chess grandmaster Timoshchenko*, ICCA Journal, **20.1**, 40-47, 1997
- [2] I. Althöfer, *Doppelfritz mit Chef*, Computerschach & Spiele, 33-36, Oktober 1996.
- [3] I. Althöfer, *On the k-best Mode in Computer Chess: Measuring the Similarity of Move Proposals*, ICCA Journal, **20.3**, 152-165, 1997
- [4] I. Althöfer, W. Wenzel, *Two-Best Solutions under Distance Constraints: The Model and Exemplary Results for Matroids*, Advances in Applied Mathematics **22**, 155-185, 1999
- [5] I. Althöfer, W. Wenzel, *k-Best Solutions under Distance Constraints in Valuated  $\Delta$ -Matroids*, Advances in Applied Mathematics **22**, 381-412, 1999
- [6] M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer, 1997
- [7] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer, 1996
- [8] A. W. M. Dress, W. Wenzel, *Valuated Matroids - A new Look at the Greedy Algorithm*, Appl. Math. Lett. **4**, No. 2, 33-35, 1990
- [9] T. Ihringer, *Diskrete Mathematik*, Teubner, 1999
- [10] K. Murota, *Convexity and Steinitz's Exchange Property*, Adv. Math. **124**, 272-311, 1996
- [11] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, Math. Programming **83**, 313-371, 1998
- [12] K. Murota, *Finding Optimal Minors of Valuated Bimatroids*, Appl. Math. Lett. **8**, 37-42, 1995
- [13] K. Murota, A. Shioura, *M-Convex Function on Generalized Polymatroid*, Research Reports on Mathematical and Computing Sciences **B-320**, Tokyo Institute of Technology, 1996
- [14] K. Murota, A. Shioura, *Comment on the paper "Two-Best Solutions under Distance Constraints: The Model and Exemplary Results for Matroids" by I. Althöfer and W. Wenzel*, Memorandum, 1997
- [15] G.-W. Weber, *Einführung in die Diskrete Mathematik*, Vorlesungsskript, TU Chemnitz, Oktober 2001