TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ-ZWICKAU

Berechnung der Charakteristiken für sequentielle Tests zu zusammengesetzten Hypothesen

K.-H. Eger, A. Schwager

Preprint 97-3

Fakultät für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Gütefunktion und der mittlere Stichprobenumfang sind wesentliche Kriterien zur Beurteilung der Güte eines Tests. Ihre Kenntnis ist Voraussetzung für die Bewertung der Qualität der getroffenen Entscheidung sowie für eine eventuelle Abschätzung der zu erwartenden Prüfkosten.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der exakten Berechnung von mittlerem Stichprobenumfang und Gütefunktion sowie den Ableitungen der Gütefunktion des in [3] vorgestellten sequentiellen Tests (N^*, δ^*) für zusammengesetzte Hypothesen der Form

$$H_0 : \theta \leq \theta^* \quad \text{und} \quad H_1 : \theta > \theta^*, \quad \underline{\theta} < \theta^* < \overline{\theta}.$$

Dabei soll zunächst nur der Fall, daß θ der unbekannte Parameter einer zur einparametrigen Exponentialfamilie gehörenden diskreten Verteilung ist, betrachtet werden.

Das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren zur exakten Berechnung der Charakteristiken wurde 1980 von K.-H. Eger (siehe [1] und [2]) für den Waldschen sequentiellen Quotiententest (WSQT) entwickelt.
Die Berechnungsmethode beruht im wesentlichen auf der Darstellung des Fortsetzungsgebietes des Tests als Menge von Gitterpunkten, der Existenz von „äquivalenten" Gitterpunkten im Fortsetzungsbereich sowie der Tatsache, daß Tests, die in solchen „äquivalenten" Punkten starten, die gleichen Charakteristiken besitzen. Diese Methode der exakten Berechnung der Charakteristiken eines WSQT kann auf den hier betrachteten Test (N^*, δ^*) für zusammengesetzte Hypothesen der Form $H_0 : \theta \leq \theta^*$ und $H_1 : \theta > \theta^*$, $\underline{\theta} < \theta^* < \overline{\theta}$ über den Parameter θ einer zur einparametrischen Exponentialfamilie gehörenden diskreten Verteilung aufgrund der dem WSQT ähnlichen Struktur (siehe [3]) problemlos übertragen werden und ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Im Ergebnis werden zwei Gleichungssysteme zur Berechnung der Güte- und ASN- Funktion angegeben.

Neben der Gütefunktion und dem mittleren Stichprobenumfang ist für Tests (N^*, δ^*) zum Prüfen von Hypothesen der Art $H_0 : \theta \leq \theta^*$ und $H_1 : \theta > \theta^*$, $\underline{\theta} < \theta^* < \overline{\theta}$ die Ableitung der Güte- bzw. OC-Funktion für die Beurteilung der Trennschärfe des Tests von Bedeutung. Mit einem, auf der in [2] dargestellten Methode zur Berechnung der Charakteristiken aufbauenden, analogen Verfahren können auch die Ableitungen der Charakteristiken berechnet werden.
Im Anschluß an die Darstellung der exakten Berechnungsmethode der Charakteristiken des sequentiellen Tests (N^*, δ^*) für zusammengesetzte Hypothesen der hier betrachteten Form wird daher die Berechnung der Ableitung der Güte- bzw. OC-Funktion beschrieben. Es zeigt sich, daß auch die Ableitungen dieser Charakteristiken als Lösung der jeweiligen Gleichungssysteme exakt und auf direktem Weg berechnet werden können.

Den Abschluß der Arbeit bilden Beispiele für die exakte Berechnung der Charakteristiken sowie ihrer Ableitungen von Tests (N^*, δ^*) über die zusammengesetzten Hypothesen $H_0 : \theta \leq \theta^*$ und $H_1 : \theta > \theta^*$, $\underline{\theta} < \theta^* < \overline{\theta}$.

2 Der sequentielle Test für zusammengesetzte Hypothesen

Gegeben sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_\theta(x) = P_\theta(X = x)$ bezüglich eines geeignet gewählten Maßes auf der Menge der ganzen Zahlen Γ.
Es bezeichne θ einen unbekannten reellwertigen Verteilungsparameter mit Werten in einer Parametermenge $\Theta = \left(\underline{\theta}, \overline{\theta}\right)$.
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_\theta(x)$ gehöre zur einparametrigen Exponentialfamilie und habe die Form

$$f_\theta(x) = h(x)\exp\{d(\theta)x - c(\theta)\}\,,$$

wobei $d(.)$ streng monoton in θ auf Θ sowie $c(.)$ und $d(.)$ auf Θ zweimal differenzierbare Funktionen seien.
Zu entscheiden sei zwischen den Hypothesen

$$H_0 : \theta \leq \theta^* \quad \text{und} \quad H_1 : \theta > \theta^*, \quad \underline{\theta} < \theta^* < \overline{\theta} \tag{1}$$

mit Hilfe eines sequentiellen Tests folgender Struktur:
Als Testgröße werde für $n = 1, 2, \ldots$ die Stichprobenfunktion

$$Z_n^* = d'(\theta^*)\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\frac{c'(\theta^*)}{d'(\theta^*)}\right], \quad d'(\theta^*) \neq 0$$

genutzt. Sind a^* und b^*, $0 < b^* < a^* < \infty$ zwei vorgegebene Stoppgrenzen, so seien der Stichprobenumfang N^* und die Entscheidungsregel δ^*, $\delta^* : \Omega \to [0,1]$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} N^* &= \begin{cases} \inf\{n \geq 1 : Z_n^* \notin (b^*, a^*)\}\,, & \text{falls ein solches } n \text{ existiert} \\ \infty & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \\ \delta^* &= \mathbb{I}_{\{Z_n^* \geq a^*,\, N^* < \infty\}}\,. \end{aligned}$$

Der so definierte Test werde im weiteren mit (N^*, δ^*) bezeichnet.

Es sei im folgenden $\gamma_1 = d'(\theta^*)$, o. B. d. A. $\gamma_1 > 0$, und $\gamma_0 = c'(\theta^*)$.
Zur Entscheidung über die Fortsetzung des Tests bzw. den Abbruch mit einer Annahme oder Ablehnung der Nullhypothese werde die Stichprobensumme $S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i$ beobachtet. Dann modifiziert sich die kritische Ungleichung

$$b^* < Z_n^* < a^*$$

des Tests (N^*, δ^*) zu

$$n\frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{b^*}{\gamma_1} < \sum_{i=1}^{n} X_i < n\frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{a^*}{\gamma_1}\,.$$

Da die Zufallsgrößen X_i, $i = 1, 2, \ldots$ ganzzahlig sind, und damit auch die Stichprobensumme $S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i$ ganzzahlig ist, bietet es sich an, das Fortsetzungsgebiet des Tests als Menge von Gitterpunkten

$$M = \left\{ (n,k) \in \Gamma_0^+ \times \Gamma : n\frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{b^*}{\gamma_1} < k < n\frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{a^*}{\gamma_1} \right\} \tag{2}$$

zu beschreiben.
Bei dieser Betrachtungsweise startet der Test (N^*, δ^*) auf der Stufe 0 im Gitterpunkt $(0,0)$ und wird fortgesetzt, solange die Punkte $(n, \sum_{i=1}^n X_i)$ Elemente der Gitterpunktmenge M sind.
In Verallgemeinerung dieser Betrachtungsweise kann jeder Punkt $(j,k) \in M$ als Startpunkt eines Tests (N^*, δ^*) angesehen werden. Da die Stoppgrenzen

$$\begin{aligned} a^*(n) &= n\frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{a^*}{\gamma_1} \quad \text{und} \\ b^*(n) &= n\frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{b^*}{\gamma_1} \end{aligned}$$

dabei erhalten bleiben, wird es sich als sinnvoll erweisen, neben dem gegebenen Test (N^*, δ^*) den Punkten (j,k) der Gitterpunktmenge M Tests $T^*(j,k)$ zuzuordnen, die sich vom ursprünglichen Test im Prinzip nur durch den veränderten Startpunkt $(j,k) \in M$ unterscheiden.

Definition 2.1: *Gegeben sei der sequentielle Test (N^*, δ^*) zur Entscheidung zwischen den Hypothesen (1), dessen Fortsetzungsgebiet als Gitterpunktmenge M der Form (2) darstellbar ist. Dann bezeichnet $T^*(j,k) = (N^*(j,k), \delta^*(j,k))$ für jeden Gitterpunkt $(j,k) \in M$ einen Test zur Entscheidung zwischen den Hypothesen (1) mit dem Startpunkt auf der Stufe j im Punkt $(j,k) \in M$. Der Stichprobenumfang des Tests $T^*(j,k)$ ist dann durch*

$$N^*(j,k) = \begin{cases} \inf\left\{ n \geq 1 : \left(n+j, k + \sum_{i=1}^{n} X_{i+j} \right) \notin M \right\} & \text{, falls ein solches } n \text{ existiert} \\ \infty & \text{, sonst} \end{cases}$$

und die Entscheidungsregel durch

$$\delta^*(j,k) = \mathbb{1}\left\{ k + \sum_{i=1}^{N^*(j,k)} X_{i+j} \geq \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(j + N^*(j,k)) + \frac{a^*}{\gamma_1},\ N^*(j,k) < \infty \right\}$$

definiert.

Offensichtlich gilt $T^*(0,0) = (N^*, \delta^*)$, d. h. $N^*(0,0) = N^*$ und $\delta^*(0,0) = \delta^*$.

Die in [2] angegebene Methode, die im weiteren vorgestellt und auf die Berechnung der Charakteristiken des sequentiellen Tests über zusammengesetzte Hypothesen der Form (1) angewandt werden soll, ermöglicht die Berechnung der Charakteristiken des Tests $T^*(j,k)$ für beliebige Startwerte $(j,k) \in M$. Eine wesentliche Voraussetzung dieser Berechnungsmethode ist die Existenz von äquivalenten Gitterpunkten, Punkten der Gitterpunktmenge M, die dadurch charakterisiert sind, daß sie in Ordinatenrichtung den gleichen Abstand von den Stoppgrenzen $a^*(n)$ und $b^*(n)$ besitzen. Sie sind wie folgt definiert:

Definition 2.2: *Zwei Punkte (j,k), $(j',k') \in M$ heißen äquivalent, wenn*

$$k' - j'\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = k - j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}.$$

Der folgende Satz beschreibt die Voraussetzungen für die Existenz äquivalenter Gitterpunkte in der Menge M:

Satz 2.1: *Zu einem gegebenen Punkt $(j,k) \in M$ existiert mindestens ein äquivalenter Gitterpunkt $(j',k') \in M$, $j \neq j'$, $k \neq k'$, wenn $\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ rational ist.*

Beweis: (siehe [2], Lemma 3.1.1., S. 112)

3 Die Berechnung der Charakteristiken

Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, an dieser Stelle generell vorauszusetzen, daß der Quotient γ_0/γ_1 rational ist, es also zwei teilerfremde Zahlen $g_0, g_1 \in \Gamma$ mit

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \frac{g_0}{g_1}, \quad g_1 \neq 0$$

gibt.
Unter Verwendung dieser Annahme sind für $(j,k) \in M$

$$\begin{aligned} S^*(j,k) &= k + \sum_{i=1}^{N^*(j,k)} X_{i+j} \quad \text{und} \\ Z^*(j,k) &= g_1 S^*(j,k) - g_0\,(j + N^*(j,k)) \end{aligned} \tag{3}$$

ganzzahlige Zufallsgrößen und die Testgröße $Z^*_{N^*}$ kann mit ihrer Hilfe wie folgt dargestellt werden:

$$Z^*_{N^*} = \frac{\gamma_1}{g_1} Z^*(0,0).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Z^*_{N^*} &= \gamma_1 \left(\sum_{i=1}^{N^*} X_i - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} N^* \right) \\ &= \frac{\gamma_1}{g_1} \left(g_1 \sum_{i=1}^{N^*(0,0)} X_i - g_0 N^*(0,0) \right) \\ &= \frac{\gamma_1}{g_1} Z^*(0,0). \end{aligned}$$

Die Charakteristiken des Tests $T^*(j,k)$, $(j,k) \in M$ können als Erwartungswerte $E_\theta z(N^*(j,k), Z^*(j,k))$, $\theta \in \Theta$, spezieller meßbarer Funktionen $z : \Gamma_0^+ \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ dargestellt werden. So gilt z. B. für $z(x,y) = x^r$, $r \in \Gamma^+$

$$E_\theta z\left(N^*(j,k), Z^*(j,k)\right) = E_\theta \left(N^*(j,k)\right)^r .$$

Die Funktion $z(x,y) = \mathbb{I}_{\left\{\frac{\gamma_1}{g_1} y \geq a^*, x < \infty\right\}}$ liefert dagegen unter Berücksichtigung der Beziehung (3) die Gütefunktion des Tests $T^*(j,k)$:

$$\begin{aligned} E_\theta z\left(N^*(j,k), Z^*(j,k)\right) &= E_\theta \, \mathbb{I}_{\left\{\frac{\gamma_1}{g_1} Z^*(j,k) \geq a^*, N^*(j,k) < \infty\right\}} \\ &= E_\theta \, \mathbb{I}_{\left\{\gamma_1 \left[k + \sum_{i=1}^{N^*(j,k)} X_{i+j} - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(j + N^*(j,k))\right] \geq a^*, N^*(j,k) < \infty\right\}} \\ &= E_\theta \, \mathbb{I}_{\left\{k + \sum_{i=1}^{N^*(j,k)} X_{i+j} \geq \frac{a^*}{\gamma_1} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(j + N^*(j,k)), N^*(j,k) < \infty\right\}} \\ &= E_\theta \delta^*(j,k) . \end{aligned}$$

Für $(j,k) = (0,0) \in M$ ergeben sich dann sofort die Gütefunktion und die Momente des Stichprobenumfangs des Tests (N^*, δ^*).
Somit können mit Hilfe des allgemeineren Ansatzes nicht nur die Charakteristiken des Tests (N^*, δ^*), sondern auch die der Tests $T^*(j,k)$ mit beliebigem Startpunkt $(j,k) \in M$ ermittelt werden.
Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Definition äquivalenter Gitterpunkte angegeben und festgestellt, unter welchen Bedingungen diese im Fortsetzungsgebiet M des sequentiellen Tests existieren (siehe Satz 2.1). Die Bedeutung der Existenz äquivalenter Gitterpunkte für die Berechnung von Charakteristiken des Tests $T^*(j,k)$ ergibt sich aus dem folgenden Satz.

Satz 3.1: *Gegeben sei der sequentielle Test* $T^*(j,k) = (N^*(j,k), \delta^*(j,k))$ *sowie zwei äquivalente Punkte* (j', k'), $(j'', k'') \in M$, $j' \neq j''$, $k' \neq k''$. *Sei außerdem* $z : \Gamma_0^+ \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ *eine meßbare Funktion mit* $E_\theta z\left(N^*(j',k'), Z^*(j',k')\right) < \infty$ *für* $\forall \theta \in \Theta$. *Dann gilt*

$$E_\theta z\left(N^*(j',k'), Z^*(j',k')\right) = E_\theta z\left(N^*(j'',k''), Z^*(j'',k'')\right) .$$

Beweis: (vgl. [2], S. 144, Lemma 3.2.1.)
Eine Folgerung dieses Satzes ist, daß die Charakteristiken von Tests, die in äquivalenten Gitterpunkten des Fortsetzungsgebietes M starten, übereinstimmen.

Zur Vereinfachung der weiteren Darstellung der Berechnungsmethode werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

Definition 3.1: *Sei für* $\forall j \in \Gamma_0^+$

$$\begin{aligned} k_0(j) &= \min\left\{k \in \Gamma : k > \frac{\gamma_0}{\gamma_1} j + \frac{b^*}{\gamma_1}\right\} , \\ k_1(j) &= \max\left\{k \in \Gamma : k < \frac{\gamma_0}{\gamma_1} j + \frac{a^*}{\gamma_1}\right\} , \\ K(j) &= \{k \in \Gamma : k_0(j) \leq k \leq k_1(j)\} , \\ \overline{K}(j) &= \Gamma \setminus K(j) . \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Charakteristiken ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße $S^*(j,k)$, ausgehend von einem Gitterpunkt $(j,k) \in M$ in endlich vielen Schritten einen Punkt (j',k'): $k' \in \overline{K}(j')$, $j' \in \Gamma_0^+$, $j' > j$, erreicht, und damit eine Entscheidung für eine der beiden Hypothesen ermöglicht wird, von Interesse. Diese Übergangswahrscheinlichkeiten seien wie folgt definiert:

Definition 3.2: *Sei für* $(j,k) \in M$ *und* $(j',k') \in \Gamma_0^+ \times \Gamma$, $j' > j$

$$\begin{aligned}
c_{k,k'}(j,j') &= \left\{ k + \sum_{i=1}^{n} X_{i+j} \in K(n+j),\ n = 1,\dots,j'-1-j \textit{ und} \right. \\
&\qquad \left. k + \sum_{i=1}^{j'-j} X_{i+j} = k' \right\}, \\
c^{\theta}_{k,k'}(j,j') &= P_\theta\left(c_{k,k'}(j,j')\right),\ \theta \in \Theta, \\
\mathbf{C}^{\theta}(j,j') &= \left(c^{\theta}_{k,k'}(j,j')\right)_{k \in K(j), k' \in K(j')}, \\
\mathbf{c}^{\theta}_{k'}(j,j') &= \left\{c^{\theta}_{k,k'}(j,j')\right\}_{k \in K(j)}, \quad k' \in \overline{K}(j').
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung seien noch folgende Bezeichnungen vereinbart:

Definition 3.3: *Sei* $z : \Gamma_0^+ \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ *eine meßbare, reellwertige Funktion mit* $E_\theta z(N^*(j,k), Z^*(j,k)) < \infty$ *für* $(j,k) \in \Gamma_0^+ \times \Gamma$. *Dann sei für* $\theta \in \Theta$ *und* $(j,k) \in M$

$$\begin{aligned}
w^{\theta}_{z}(j,k) &= E_\theta z\left(N^*(j,k), Z^*(j,k)\right), \\
\mathbf{w}^{\theta}_{z}(j) &= \left\{w^{\theta}_{z}(j,k)\right\}_{k \in K(j)}, \\
w^{\theta}_{z,g_1}(j,k) &= E_\theta z\left(g_1 + N^*(j,k), Z^*(j,k)\right), \\
\mathbf{w}^{\theta}_{z,g_1}(j) &= \left\{w^{\theta}_{z,g_1}(j,k)\right\}_{k \in K(j)}.
\end{aligned}$$

Die auftretenden Vektoren sind jeweils Spaltenvektoren, d. h. $\mathbf{c}^{\theta}_{k'}(j,j')$ ist ein Spaltenvektor der Länge $|K(j)|$. Analog ist $\mathbf{C}^{\theta}(j,j')$ eine $|K(j)| \times |K(j')|$-Matrix. Mit den obigen Definitionen ergibt sich nun die folgende Rekursiongleichung als Grundlage für die Berechnung der Charakteristiken.

Satz 3.2: *Sei* (N^*, δ^*) *ein sequentieller Test zur Entscheidung zwischen den Hypothesen (1) mit dem Fortsetzungsgebiet* M*, darstellbar in der Form (2).* $T^*(j,k)$ *seien die den Punkten* $(j,k) \in M$ *zugeordneten Tests und* z *eine meßbare, reellwertige Funktion* $z : \Gamma_0^+ \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ *mit* $E_\theta z(N^*(j,k), Z^*(j,k)) < \infty$ *für* $(j,k) \in M$. *Dann gilt für* $j \in \Gamma_0^+$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^{\theta}_{z}(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k' \in \overline{K}(j+n)} & z(n, g_1 k' - g_0(j+n))\mathbf{c}^{\theta}_{k'}(j,j+n) \\
& + \mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\mathbf{w}^{\theta}_{z,g_1}(j),
\end{aligned} \tag{4}$$

Beweis: (siehe [2], S. 116, Lemma 3.2.2.)

Für spezielle Funktionen z, die in der nachfolgend angegebenen Weise nur von der zweiten Komponente abhängen, kann die Berechnung von $\boldsymbol{w}^{\theta}_{z,g_1}(j)$ auf die Berechnung von $\boldsymbol{w}^{\theta}_{z}(j)$ zurückgeführt werden, so daß sich für (4) das folgende Gleichungssystem ergibt.

Folgerung 3.2.1: *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt und existiere ein $c \in \mathbb{R}^1$, so daß $z(g_1 + n, y) = c\, z(n, y)$. Dann gilt für $j \in \Gamma_0^+$*

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - c\,\mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{w}^{\theta}_{z}(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k' \in \overline{K}(j+n)} z(n, g_1 k' - g_0(j+n)) \boldsymbol{c}^{\theta}_{k'}(j, j+n), \quad (5)$$

wobei $\mathbf{E}_{j,j'}$ die $|K(j)| \times |K(j')|$-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

Beweis: (siehe [2], S. 117, Theorem 3.2.1.)

Bei der Berechnung der Charakteristiken mit Hilfe von Satz 3.2 und Folgerung 3.2.1 werden die Übergangswahrscheinlichkeiten der Matrix $\mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)$ für $j \in \Gamma_0^+$ und des Vektors $\boldsymbol{c}^{\theta}_{k'}(j, j+n)$ für $k' \in \overline{K}(j+n), j \in \Gamma_0^+, n \in \Gamma^+$ benötigt. Da die Folge der Zufallsgrößen $\{X_n\}_{n \in \Gamma^+}$ als unabhängig und identisch verteilt vorausgesetzt wurde, können diese Wahrscheinlichkeiten iterativ berechnet werden.

Satz 3.3: *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 gilt für $n = 1, 2, \ldots, g_1$:*

1. $$\mathbf{C}^{\theta}(j, j+n) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{C}^{\theta}(j+i, j+i+1) = \mathbf{C}^{\theta}(j, j+n-1)\mathbf{C}^{\theta}(j+n-1, j+n)\,. \quad (6)$$

   Dabei sind die Komponenten der Matrix $\mathbf{C}^{\theta}(j+i, j+i+1)$ für $k \in K(j+i)$ und $k' \in K(j+i+1)$ durch $c^{\theta}_{k,k'}(j+i, j+i+1) = P_{\theta}(X_1 = k' - k)$ gegeben.

2. $$\boldsymbol{c}^{\theta}_{k'}(j, j+n) = \mathbf{C}^{\theta}(j, j+n-1)\boldsymbol{c}^{\theta}_{k'}(j+n-1, j+n)\,, \quad (7)$$

   wobei die Matrix $\mathbf{C}^{\theta}(j, j+n-1)$ durch (6), ($\mathbf{C}^{\theta}(j,j) = \mathbf{E}_{j,j}$) und die Elemente von $\boldsymbol{c}^{\theta}_{k'}(j+n-1, j+n)$ durch $c^{\theta}_{k,k'}(j+n-1, j+n) = P_{\theta}(X_1 = k' - k)$ für $k \in K(j+n-1)$ und $k' \in \overline{K}(j+n)$ gegeben sind.

Beweis: (siehe [2], S. 118, Lemma 3.2.4.)

3.1 Die Gütefunktion

Auf der Grundlage der im vorangegangenen Abschnitt angegebenen Sätze kann nun die Güte- bzw. OC-Funktion des Tests $T^*(j,k)$ angegeben werden. Dazu sollen zunächst noch einige Bezeichnungen eingeführt werden.

Definition 3.4: *Sei für $\theta \in \Theta$, $j \in \Gamma^+$ und $k \in K(j)$*

$$\begin{aligned}
m_k^\theta(j) &= P_\theta\left(\left\{k + \sum_{i=1}^{N^*(j,k)} X_{j+i} \geq \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(j + N^*(j,k)) + \frac{a^*}{\gamma_1}\right\}\right) \\
\boldsymbol{m}^\theta(j) &= \left\{m_k^\theta(j)\right\}_{k \in K(j)} \\
q_k^\theta(j) &= P_\theta\left(\left\{k + \sum_{i=1}^{N^*(j,k)} X_{j+i} \leq \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(j + N^*(j,k)) + \frac{b^*}{\gamma_1}\right\}\right) \\
\boldsymbol{q}^\theta(j) &= \left\{q_k^\theta(j)\right\}_{k \in K(j)} \\
r_k^\theta(j, j+n) &= P_\theta\Bigg(\Bigg\{k + \sum_{i=1}^{m} X_{i+j} \in K(j+m), m = 1, \ldots, n-1, \\
&\qquad k + \sum_{i=1}^{n} X_{j+i} \geq a^*(j+n)\Bigg\}\Bigg) \\
\boldsymbol{r}^\theta(j, j+n) &= \left\{r_k^\theta(j, j+n)\right\}_{k \in K(j)} \\
a_k^\theta(j, j+n) &= P_\theta\Bigg(\Bigg\{k + \sum_{i=1}^{m} X_{i+j} \in K(j+m), m = 1, \ldots, n-1, \\
&\qquad k + \sum_{i=1}^{n} X_{j+i} \leq b^*(j+n)\Bigg\}\Bigg) \\
\boldsymbol{a}^\theta(j, j+n) &= \left\{a_k^\theta(j, j+n)\right\}_{k \in K(j)} .
\end{aligned}$$

Für einen beliebigen Punkt $(j, k) \in M$ geben $m_k^\theta(j)$ bzw. $q_k^\theta(j)$ die Wahrscheinlichkeit an, mit dem Test $T^*(j, k)$ die Hypothese H_0 bzw. H_1 abzulehnen.
Für die Berechnung von Güte- und OC-Funktion ergeben sich damit die folgenden Gleichungssysteme.

Satz 3.4: *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt und $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$. Dann gilt für $j \in \Gamma_0^+$:*

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{m}^\theta(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{r}^\theta(j, j+n), \tag{8}$$

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{q}^\theta(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{a}^\theta(j, j+n). \tag{9}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}^\theta(j, j+n)$ und $\boldsymbol{r}^\theta(j, j+n)$ können dabei wie folgt berechnet werden.
Für $n = 1, \ldots, g_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^\theta(j, j+n) &= \mathbf{C}^\theta(j, j+n-1)\, \boldsymbol{r}^\theta(j+n-1, j+n), \\
\boldsymbol{a}^\theta(j, j+n) &= \mathbf{C}^\theta(j, j+n-1)\, \boldsymbol{a}^\theta(j+n-1, j+n),
\end{aligned}$$

sowie für $k \in K(j+n-1)$

$$\begin{aligned}
r_k^\theta(j+n-1, j+n) &= P_\theta(X_1 > k_1(j+n) - k), \\
a_k^\theta(j+n-1, j+n) &= P_\theta(X_1 < k_0(j+n) - k).
\end{aligned}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich durch Einsetzen der speziellen Funktionen $z(n,y) = \mathbb{1}_{\left\{\frac{\gamma_1}{g_1}y \geq a^*, n<\infty\right\}}$ bzw. $z(n,y) = \mathbb{1}_{\left\{\frac{\gamma_1}{g_1}y \leq b^*, n<\infty\right\}}$ in die Beziehung (5). (siehe auch [2], S. 120, Theorem 3.3.1.)

Folgerung 3.4.1: *Sei (N^*, δ^*) ein abgeschlossener sequentieller Test zur Entscheidung über die Hypothesen (1) sowie $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$. Dann gilt für die Gütefunktion $M^*(\theta)$ des Tests (N^*, δ^*)*

$$M^*(\theta) = m_0^\theta(0)\,. \tag{10}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz 3.4 mit $T^*(0,0) = (N^*, \delta^*)$ und $\delta^*(0,0) = \delta^*$.

Damit kann die Gütefunktion des Tests (N^*, δ^*) auf recht einfache Weise als Lösung des linearen Gleichungssystems (8) ermittelt werden.

3.2 Die Momente des Stichprobenumfangs

Um die r–ten Momente des Stichprobenumfangs $N^*(j,k)$ anzugeben, werden noch einige Definitionen benötigt.

Definition 3.5: *Sei $z : \Gamma_0^+ \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ eine meßbare, reellwertige Funktion mit $E_\theta z(N^*(j,k), Z^*(j,k)) < \infty$ für $(j,k) \in \Gamma_0^+ \times \Gamma$. Dann sei für $\theta \in \Theta$, $(j,k) \in M$ und $r \in \Gamma^+$*

$$\begin{aligned} e_{k,r}^\theta(j) &= E_\theta(N^*(j,k))^r \quad \text{für } k \in K(j) \quad \text{und} \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{\theta}}(j) &= \left(e_{k,r}^\theta(j,k)\right)_{k\in K(j)}\,. \end{aligned}$$

Auf der Grundlage des Satzes 3.2 ergibt sich mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage für die Momente des Stichprobenumfangs des Tests $T^*(j,k)$.

Satz 3.5: *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt und $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$. Weiterhin gelte $\mathcal{D}_\theta^2 X_1 > 0$. Dann gilt für $j \in \Gamma_0^+$ und jedes $r \in \Gamma^+$:*

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j,j+g_1)\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{\theta}}(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} n^r\left(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\theta}}(j,j+n) + \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\theta}}(j,j+n)\right) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{r-1}\binom{r}{n} g_1^{r-n}\mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j,j+g_1)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{\theta}}(j)\,, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\theta}}(j,j+n)$ und $\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\theta}}(j,j+n)$ wie in Satz 3.4 definiert seien.

Beweis: Die Aussage des Satzes ergibt sich durch Einsetzen der speziellen Funktion $z(n,y) = n^r$, $r \in \Gamma^+$, in die Beziehung (4).

Für $r = 1$ ergibt sich der mittlere Stichprobenumfang sowie für $r = 2$ das zweite Moment des Stichprobenumfangs.

Folgerung 3.5.1: *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.5. Dann gilt für* $j \in \Gamma_0^+$*:*

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right) \boldsymbol{e}_1^\theta(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} n\left(\boldsymbol{a}^\theta(j,j+n) + \boldsymbol{r}^\theta(j,j+n)\right) \\
&\quad + g_1 \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\mathbf{1} \\
\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right) \boldsymbol{e}_2^\theta(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} n^2\left(\boldsymbol{a}^\theta(j,j+n) + \boldsymbol{r}^\theta(j,j+n)\right) \\
&\quad + g_1^2 \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\mathbf{1} \\
&\quad + 2g_1 \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\mathbf{e}_1^\theta(j)\,,
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{1} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{|K(j)|-mal})^T$ *ist.*

Folgerung 3.5.2: *Sei* (N^*,δ^*) *ein abgeschlossener sequentieller Test zur Entscheidung über die Hypothesen (1),* $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$ *sowie* $\mathcal{D}^2(X_1;\theta) > 0$. *Dann gilt für die r−ten Momente,* $r \in \Gamma^+$*, des Stichprobenumfangs des Tests* (N^*,δ^*)

$$E_\theta(N^*)^r = \eta_{0,r}^\theta(0)\,. \tag{12}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz 3.5 mit $T^*(0,0) = (N^*,\delta^*)$ und $N^*(0,0) = N^*$.

Damit können auch die Momente des Stichprobenumfangs des Tests (N^*,δ^*) als Lösung eines linearen Gleichungssystems ermittelt werden.

4 Die Berechnung der Ableitung der Gütefunktion

Wie eingangs bereits erwähnt, ist für die Beurteilung der Trennschärfe eines sequentiellen Tests die Ableitung der Güte- bzw. OC-Funktion ein entscheidendes Kriterium. Wünschenswert ist ein möglichst steiler Anstieg der Güte- bzw. OC-Funktion an der Stelle θ^*; je steiler der Anstieg, um so trennschärfer arbeitet der Test, wenn der tatsächliche Parameter θ in der Nähe des Trennparameters θ^* liegt. In der Regel ist jedoch mit einer hohen Trennschärfe auch ein großer mittlerer Stichprobenumfang des Tests verbunden. Bei der Konstruktion eines sequentiellen Tests ist also neben der Beachtung der Anforderungen an die Genauigkeit des Tests eine Abwägung zwischen geforderter Trennschärfe und maximalem mittlerem Stichprobenumfang erforderlich, was die Kenntnis sowohl der Ableitung der Güte- bzw. OC-Funktion als auch des mittleren Stichprobenumfangs des Tests voraussetzt.

In diesem Abschnitt soll für den Test (N^*,δ^*) über einen unbekannten Parameter

θ einer zur einparametrigen Exponentialfamilie gehöhrenden diskreten Verteilung die exakte Berechnung der Ableitung der Güte- bzw. OC-Funktion dargestellt werden. Grundlage dafür bildet erneut das in [2] angegebene Verfahren zur exakten Berechnung der Charakteristiken.

4.1 Differentiation des Gleichungssystems

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden die Gleichungssysteme (8) und (9) zur Berechnung der Güte- bzw. OC-Funktion der Tests $T^*(j,k)$ mit dem Startpunkt $(j,k) \in M$ auf der Stufe j, aus denen sich durch Differentiation bezüglich θ Gleichungssysteme für die ersten Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle $\theta \in \Theta$ ergeben. Die gesuchten Anstiege der OC- bzw. Gütefunktion des Tests (N^*, δ^*) ergeben sich dann aus der Beziehung $M^{*\prime}(\theta) = m_0^{\theta\prime}(0)$ bzw. $Q^{*\prime}(\theta) = q_0^{\theta\prime}(0)$. Für die weiteren Betrachtungen werde vereinbart, daß unter der Ableitung einer Matrix bzw. eines Vektors die Matrix bzw. der Vektor der Ableitungen der einzelnen Komponenten verstanden werden soll.

Satz 4.1: *Sei (N^*, δ^*) ein sequentieller Test zur Entscheidung zwischen den Hypothesen (1) mit dem Fortsetzungsgebiet M, darstellbar in der Form (2). $T^*(j,k)$ seien die den Punkten $(j,k) \in M$ zugeordneten Tests. Außerdem seien $c(.)$ und $d(.)$ auf $\Theta = \left(\underline{\theta}, \overline{\theta}\right)$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten unter den Voraussetzungen von Satz 3.4 für den Vektor der ersten Ableitung von Güte- und OC-Funktion $\boldsymbol{m}^{\theta\prime}(j)$ bzw. $\boldsymbol{q}^{\theta\prime}(j)$ für $\forall j \in \Gamma_0^+$ die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\right) \boldsymbol{m}^{\theta\prime}(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{r}^{\theta\prime}(j,j+n) \\
&\quad + \mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j+g_1)\boldsymbol{m}^{\theta}(j), \qquad (13) \\
\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\right) \boldsymbol{q}^{\theta\prime}(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{a}^{\theta\prime}(j,j+n) \\
&\quad + \mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j+g_1)\boldsymbol{q}^{\theta}(j). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Dabei gilt für $n = 1, \ldots, g_1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j+n) &= \mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j+n-1)\,\mathbf{C}^{\theta}(j+n-1,j+n) \\
&\quad + \mathbf{C}^{\theta}(j,j+n-1)\,\mathbf{C}^{\theta\prime}(j+n-1,j+n), \qquad (15) \\
\boldsymbol{r}^{\theta\prime}(j,j+n) &= \mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j+n-1)\,\boldsymbol{r}^{\theta}(j+n-1,j+n) \\
&\quad + \mathbf{C}^{\theta}(j,j+n-1)\,\boldsymbol{r}^{\theta\prime}(j+n-1,j+n), \qquad (16) \\
\boldsymbol{a}^{\theta\prime}(j,j+n) &= \mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j+n-1)\,\boldsymbol{a}^{\theta}(j+n-1,j+n) \\
&\quad + \mathbf{C}^{\theta}(j,j+n-1)\,\boldsymbol{a}^{\theta\prime}(j+n-1,j+n), \qquad (17)
\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{C}^{\theta}(j,j) = \mathbf{E}_{j,j}$ und $\mathbf{C}^{\theta\prime}(j,j) = \mathbf{0}$, mit $\mathbf{E}_{j,j}$ und $\mathbf{0}$ eine geeignet gewählte Einheits- bzw. Nullmatrix, und für $k \in K(j+n-1)$,

$k'' \in K(j+n)$ *sowie* $k' \in \overline{K}(j+n)$

$$\begin{aligned} c^{\theta'}_{k,k''}(j+n-1,j+n) &= \frac{dP_\theta(X_1 = k''-k)}{d\theta}, \\ r^{\theta'}_k(j+n-1,j+n) &= \frac{dP_\theta(X_1 > k_1(j+n)-k)}{d\theta} \quad \textit{und} \\ a^{\theta'}_k(j+n-1,j+n) &= \frac{dP_\theta(X_1 < k_0(j+n)-k)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Beweis: Für $n = 1,\dots,g_1$ gilt

$$\mathbf{C}^\theta(j,j+n) = \mathbf{C}^\theta(j,j+n-1)\mathbf{C}^\theta(j+n-1,j+n), \tag{18}$$
$$\boldsymbol{r}^\theta(j,j+n) = \mathbf{C}^\theta(j,j+n-1)\boldsymbol{r}^\theta(j+n-1,j+n), \tag{19}$$
$$\boldsymbol{a}^\theta(j,j+n) = \mathbf{C}^\theta(j,j+n-1)\boldsymbol{a}^\theta(j+n-1,j+n), \tag{20}$$

wobei die Elemente der Matrix $\mathbf{C}^\theta(j+n-1,j+n)$ durch

$$\begin{aligned} c^\theta_{k,k''}(j+n-1,j+n) &= P_\theta(X_1 = k''-k) \\ &= h(k''-k)\exp\{d(\theta)(k''-k)-c(\theta)\} \end{aligned}$$

für $k \in K(j+n-1)$ und $k'' \in K(j+n)$ gegeben sind (siehe auch Satz 4.3, Gleichung (6)) und für $k \in K(j+n-1)$

$$\begin{aligned} r^\theta_k(j+n-1,j+n) &= P_\theta(X_1 > k^1(j+n)-k), \\ a^\theta_k(j+n-1,j+n) &= P_\theta(X_1 < k^0(j+n)-k) \end{aligned}$$

gilt (siehe auch Satz 3.4).
Unter den Voraussetzungen des Satzes sind die Komponenten der Matrix $\mathbf{C}^\theta(j+n-1,j+n)$ sowie der Vektoren $r^\theta_k(j+n-1,j+n)$ bzw. $a^\theta_k(j+n-1,j+n)$ bezüglich θ differenzierbar für $\forall n = 1,\dots,g_1$.
Durch Differentiation der Gleichungen (18), (19) und (20) ergeben sich die gesuchte Rekursionsgleichung (15) sowie die gesuchten Ableitungen (16) bzw. (17). Damit sind sämtliche Komponenten der Gleichungssysteme (8) und (9) bezüglich θ differenzierbar. Durch Differentiation von Gleichung (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right)' \boldsymbol{m}^\theta(j) \\ &\qquad + \left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right)\boldsymbol{m}^{\theta'}(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{r}^{\theta'}(j,j+n), \end{aligned}$$

woraus unmittelbar Gleichung (13) folgt. Analog kann die Gleichung (14) hergeleitet werden.

4.2 Die Ableitung der Gütefunktion als spezielle Charakteristik

Für den Test (N^*, δ^*) ergibt sich über den Satz 4.1 hinaus alternativ noch die folgende direkte Möglichkeit zur Berechnung des Anstiegs der OC- bzw. Gütefunktion, bei der der Anstieg der OC- bzw. Gütefunktion als spezielle Charakteristik aufgefaßt wird.

Wie in ([3], Kap. 3) festgestellt, gilt unter den Voraussetzungen, daß $c(.)$ und $d(.)$ auf $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ differenzierbare Funktionen und $f_n(x_n,\theta)$ auf $E = \{(\vec{x}_n,\theta) : \underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}; \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n\}$ stetig ist, für die erste Ableitung der Güte- und OC-Funktion des Tests (N^*, δ^*)

$$\begin{aligned} M^{*\prime}(\theta) &= \frac{dM^*}{d\theta}(\theta) \\ &= d'(\theta)\left[\frac{1}{d'(\theta^*)}\mathrm{E}_\theta\left(\delta^* Z^*_{N^*}\right) + C_1\mathrm{E}_\theta\left(\delta^* N^*\right)\right] \text{ bzw.} \\ Q^{*\prime}(\theta) &= \frac{dQ^*}{d\theta}(\theta) \\ &= d'(\theta)\left[\frac{1}{d'(\theta^*)}\mathrm{E}_\theta\left((1-\delta^*)Z^*_{N^*}\right) + C_1\mathrm{E}_\theta\left((1-\delta^*)N^*\right)\right], \end{aligned}$$

wobei für

$$C_1 = \frac{c'(\theta^*)}{d'(\theta^*)} - \frac{c'(\theta)}{d'(\theta)} = \mathrm{E}_{\theta^*}X - \mathrm{E}_\theta X$$

gilt. Ähnliche Gleichungen können für den Test $T^*(j,k)$ mit Startpunkt $(j,k) \in M$ hergeleitet werden.

Satz 4.2: *Sei $T^*(j,k)$ der zu (N^*, δ^*) gehörende Test zur Entscheidung zwischen den Hypothesen (1) mit dem Startpunkt auf der Stufe j im Punkt (j,k) des Fortsetzungsgebietes M. Seien $c(.)$ und $d(.)$ auf $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ differenzierbare Funktionen und $f_n(x_n,\theta)$ auf $E = \{(\vec{x}_n,\theta) : \underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}; \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n\}$ stetig. Dann gilt für die Güte- bzw. OC-Funktion des Tests $T^*(j,k)$*

$$\begin{aligned} M^{*\prime}_\theta(j,k) =& \frac{dM^*_\theta(j,k)}{d\theta} \\ =& d'(\theta)\left[\frac{1}{\gamma_1}E_\theta\Big(\delta^*(j,k)Z^*_{N^*}(j,k)\Big) - \left(k - j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)E_\theta\,\delta^*(j,k)\right. \\ &\left. + C_1 E_\theta\Big(\delta^*(j,k)N^*(j,k)\Big)\right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Q^{*\prime}_\theta(j,k) =& \frac{dQ^*_\theta(j,k)}{d\theta} \\ =& d'(\theta)\left[\frac{1}{\gamma_1}E_\theta\left(\Big(1-\delta^*(j,k)\Big)Z^*_{N^*}(j,k)\right) - \left(k - j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)E_\theta\Big(1-\delta^*(j,k)\Big)\right. \\ &\left. + C_1 E_\theta\Big((1-\delta^*(j,k))N^*(j,k)\Big)\right], \end{aligned}$$

mit

$$C_1 = \frac{c'(\theta^*)}{d'(\theta^*)} - \frac{c'(\theta)}{d'(\theta)} = E_{\theta^*}X - E_\theta X .$$

Beweis: Die Gütefunktion des Tests $T^*(j,k)$ ist definiert als

$$M_\theta^*(j,k) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)\, d\vec{x}_{n+j} \;=\; \mathrm{E}_\theta\, \delta^*(j,k) ,$$

wobei $\vec{x}_{n+j} = (x_{1+j}, \ldots, x_{n+j})$ den Sichprobenvektor des Tests $T^*(j,k)$ mit dem Startpunkt $(j,k) \in M$ auf der n-ten Teststufe bezeichnet und

$$\begin{aligned} A_n &= \{\vec{x}_{n+j} : b^* < Z_i^*(j,k) < a^*, i = 1,\ldots,n-1 \wedge Z_n^*(j,k) \geq a^*\} \\ &= \Bigg\{\vec{x}_{n+j} : b^* < \gamma_1 \left(k + \sum_{l=1}^{i} x_{j+l} - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(i+j)\right) < a^*, i = 1,\ldots,n-1 \wedge \\ &\qquad \gamma_1 \left(k + \sum_{l=1}^{n} x_{j+l} - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(n+j)\right) \geq a^* \Bigg\} \end{aligned}$$

ist.
Für die erste Ableitung der Gütefunktion gilt

$$M_\theta^{*'}(j,k) \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)\, d\vec{x}_{n+j} .$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ergibt sich daraus

$$M_\theta^{*'}(j,k) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{\partial f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)}{\partial\theta}\, d\vec{x}_{n+j} .$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\frac{\partial f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)}{\partial\theta} \;=\; \frac{\partial \ln f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)}{\partial\theta} f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)$$

ergibt sich im Fall der Dichte einer Verteilung der einparametrischen diskreten Exponentialfamilie $\mathrm{P}_\theta(X = x) = f_\theta(x) = h(x)\exp\{d(\theta)x - c(\theta)\}$

$$\begin{aligned} M_\theta^{*'}(j,k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} d'(\theta) \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i+j} - n\frac{c'(\theta)}{d'(\theta)}\right) f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)\, d\vec{x}_{n+j} \\ &= d'(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \left[\frac{1}{\gamma_1} Z_n^*(j,k) - \left(k - j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)\right. \\ &\qquad \left. + n\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{c'(\theta)}{d'(\theta)}\right)\right] f_n(\vec{x}_{n+j};\theta)\, d\vec{x}_{n+j} . \end{aligned}$$

Mit

$$C_1 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{c'(\theta)}{d'(\theta)} = \frac{c'(\theta^*)}{d'(\theta^*)} - \frac{c'(\theta)}{d'(\theta)} = E_{\theta^*}X - E_\theta X$$

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} M_\theta^{*'}(j,k) &= d'(\theta)\left[\frac{1}{\gamma_1}\mathrm{E}_\theta\Big(Z^*_{N^*}(j,k)\delta^*(j,k)\Big) - \Big(k - j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\Big)\mathrm{E}_\theta\delta^*(j,k)\right. \\ &\qquad \left. + C_1\mathrm{E}_\theta\Big(N^*(j,k)\delta^*(j,k)\Big)\right]. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise läßt sich die Gleichung für die erste Ableitung der OC-Funktion angeben.

In Abschnitt 3 wurde gezeigt, daß sich verschiedene Kenngrößen des Tests $T^*(j,k)$, $(j,k) \in M$ mit Hilfe von Erwartungswerten $\mathrm{E}_\theta z\,(N^*(j,k), Z^*(j,k))$; $\theta \in \Theta$, geeigneter meßbarer Funktionen $z : \Gamma_0 \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$ darstellen und unter der Voraussetzung der Existenz äquivalenter Gitterpunkte im Fortsetzungsgebiet M des Tests $T^*(j,k)$ über ein lineares Gleichungssystem exakt berechnen lassen. Analog können auch die Erwartungswerte $\mathrm{E}_\theta\,(\delta^*(j,k)Z^*_{N^*}(j,k))$ und $\mathrm{E}_\theta\,(\delta^*(j,k)N^*(j,k))$ bzw. $\mathrm{E}_\theta\,((1-\delta^*(j,k))\,Z^*_{N^*}(j,k))$ und $\mathrm{E}_\theta\,((1-\delta^*(j,k))\,N^*(j,k))$ als Lösung linearer Gleichungssysteme berechnet werden. Mit Hilfe dieser Gleichungssysteme können dann Gleichungssysteme zur exakten Berechnung des Anstiegs von Güte- und OC-Funktion angegeben werden. Im folgenden wird sich auf die Berechnung der Ableitung der Gütefunktion sowie der Erwartungswerte $\mathrm{E}_\theta\,(\delta^*(j,k)Z^*_{N^*}(j,k))$ und $\mathrm{E}_\theta\,(\delta^*(j,k)N^*(j,k))$ beschränkt, da die Gleichungssysteme zur Berechnung der Ableitung der OC-Funktion sowie der Erwartungswerte $\mathrm{E}_\theta\,((1-\delta^*(j,k))\,Z^*_{N^*}(j,k))$ und $\mathrm{E}_\theta\,((1-\delta^*(j,k))\,N^*(j,k))$ auf analoge Weise ermittelt werden können.

Definition 4.1: *Sei für* $(j-1,k'') \in M$ *und* $(j,k') \in \Gamma_0^+ \times \Gamma$

$$\begin{aligned} b^\theta_{k'',k'}(j-1,j) &= \sum_{k'>k_1(j)} k' P_\theta\,(X_1 = k'-k'')\,, \\ \boldsymbol{b}^\theta_{k'}(j-1,j) &= \left\{\sum_{k'>k_1(j)} k' P_\theta\,(X_1 = k'-k'')\right\}_{k''\in K(j-1)} \end{aligned}$$

und für $\theta \in \Theta$, $j \in \Gamma_0^+$ *und* $k \in K(j)$

$$\begin{aligned} s^\theta_k(j) &= E_\theta\,(\delta^*(j,k)Z^*_{N^*}(j,k)) \\ \boldsymbol{s}^\theta(j) &= \left\{s^\theta_k(j)\right\}_{k\in K(j)}\,, \\ u^\theta_k(j) &= E_\theta\,(\delta^*(j,k)N^*(j,k)) \\ \boldsymbol{u}^\theta(j) &= \left\{u^\theta_k(j)\right\}_{k\in K(j)}\,. \end{aligned}$$

Satz 4.3: *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.4 erfüllt und* $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$. *Dann gilt für* $j \in \Gamma_0^+$:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right)\boldsymbol{s}^\theta(j) &= -\gamma_0 \sum_{n=1}^{g_1}(j+n)\boldsymbol{r}^\theta(j,j+n) + \\ &\quad \gamma_1 \sum_{n=0}^{g_1-1} \mathbf{C}^\theta(j,j+n)\boldsymbol{b}^\theta_{k'}(j+n,j+n+1).\end{aligned}$$

Beweis: Entsprechend der oben angegebenen Definition ist für $j \in \Gamma_0^+$ und $\forall k \in K(j)$

$$\begin{aligned} s_k^\theta(j) &= \mathrm{E}_\theta\left(\delta^*(j,k)Z^*_{N^*}(j,k)\right) \\ &= \mathrm{E}_\theta\left(1\!\!1_{\{Z^*_{N^*}(j,k)\geq a^*, N^*(j,k)<\infty\}} Z^*_{N^*}(j,k)\right).\end{aligned}$$

Mit den Definitionen für $Z^*(j,k)$ und $k_1(j+n)$ ergibt sich

$$s_k^\theta(j) = \mathrm{E}_\theta\left(1\!\!1_{\{Z^*(j,k)\geq g_1 k_1(j+N^*(j,k)) - g_0(j+N^*(j,k))\}} \frac{\gamma_1}{g_1} Z^*(j,k)\right).$$

Damit ist die Funktion $z(n,y)$ durch

$$z(n,y) = 1\!\!1_{\{y \geq g_1 k_1(j+n) - g_0(j+n)\}} \frac{\gamma_1}{g_1} y$$

gegeben. Da $k_1(j+n+g_1) = k_1(j+n) + g_0$ gilt, ergibt sich

$$z(n+g_1,y) = z(n,y),$$

so daß die Folgerung 3.2.1 des Satzes 3.2 mit $c=1$ und $\boldsymbol{w}^\theta_z(j) = \boldsymbol{s}^\theta(j)$ angewandt werden kann. Damit gilt

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right)\boldsymbol{s}^\theta(j) = \boldsymbol{v}^\theta_z(j), \tag{21}$$

wobei

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^\theta_z(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k' \in \overline{K}(j+n)} z(n, g_1 k' - g_0(j+n)\boldsymbol{c}^\theta_{k'}(j,j+n) \\ &= \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k' \in \overline{K}(j+n)} 1\!\!1_{\{k' \geq k_1(j+n)\}} \left(\gamma_1 k' - \gamma_0(j+n)\right)\boldsymbol{c}^\theta_{k'}(j,j+n)\end{aligned}$$

ist. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
v_z^\theta(j,k) &= \\
&= \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k'>k_1(j+n)} \sum_{k''\in K(j+n-1)} c^\theta_{k,k''}(j,j+n-1) c^\theta_{k'',k'}(j+n-1,j+n)\,(\gamma_1 k' - \gamma_0(j+n)) \\
&= -\gamma_0 \sum_{n=1}^{g_1} (j+n) \sum_{k''\in K(j+n-1)} c^\theta_{k,k''}(j,j+n-1) \sum_{k'>k_1(j+n)} c^\theta_{k'',k'}(j+n-1,j+n) \\
&\quad + \gamma_1 \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k''\in K(j+n-1)} c^\theta_{k,k''}(j,j+n-1) \sum_{k'>k_1(j+n)} k' c^\theta_{k'',k'}(j+n-1,j+n) \\
&= -\gamma_0 \sum_{n=1}^{g_1} (j+n) r^\theta_k(j,j+n) \\
&\quad + \gamma_1 \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k''\in K(j+n-1)} c^\theta_{k,k''}(j,j+n-1) \sum_{k'>k_1(j+n)} k' c^\theta_{k'',k'}(j+n-1,j+n)\,.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
\boldsymbol{v}_z^\theta(j) = -\gamma_0 \sum_{n=1}^{g_1} (j+n) \boldsymbol{r}^\theta(j,j+n) + \gamma_1 \sum_{n=0}^{g_1-1} \mathbf{C}^\theta(j,j+n) \boldsymbol{b}^\theta_{k'}(j+n,j+n+1)\,.
$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (21) ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Satz 4.4: *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt und* $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$. *Dann gilt für* $j \in \Gamma_0^+$:

$$
\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1)\right) \boldsymbol{u}^\theta(j) = \sum_{n=1}^{g_1} n \boldsymbol{r}^\theta(j,i+n) + \gamma_1 \mathbf{C}^\theta(j,j+g_1) \boldsymbol{m}^\theta(j)\,.
$$

Beweis: Nach Definition 4.1 ist für alle $j \in \Gamma_0^+$ und $k \in K(j)$

$$
\begin{aligned}
u_k^\theta(j) &= \mathrm{E}_\theta\left(\delta^*(j,k) N^*(j,k)\right) \\
&= \mathrm{E}_\theta\left(\mathbb{1}_{\{Z^*_{N^*}(j,k) \geq a^*, N^*(j,k)<\infty\}} N^*(j,k)\right)
\end{aligned}
$$

Mit den Definitionen für $Z^*(j,k)$ und $k_1(j+n)$ ergibt sich

$$
u_k^\theta(j) = \mathrm{E}_\theta\left(\mathbb{1}_{\{Z^*(j,k) \geq g_1 k_1(j+N^*(j,k)) - g_0(j+N^*(j,k))\}} N^*(j,k)\right)\,,
$$

so daß die Funktion $z(n,y)$ durch

$$
z(n,y) = \mathbb{1}_{\{y \geq g_1 k_1(j+n) - g_0(j+n)\}} n
$$

gegeben ist. Da $k_1(j+n+g_1) = k_1(j+n) + g_0$ gilt, ergibt sich

$$
z(n+g_1,y) = z(n,y) + g_1\, \mathbb{1}_{\{y \geq g_1 k_1(j+n) - g_0(j+n)\}}\,.
$$

Mit Satz 3.2 gilt dann für den zu berechnenden Erwartungswertvektor

$$\boldsymbol{u}^{\theta}(j) = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}^{\theta}(j) + \mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\boldsymbol{u}^{\theta}(j) + g_1\mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\boldsymbol{m}^{\theta}(j)$$

bzw.

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\right)\boldsymbol{u}^{\theta}(j) = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}^{\theta}(j) + g_1\mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\boldsymbol{m}^{\theta}(j)\,, \tag{22}$$

mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}^{\theta}(j) &= \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k' \in \overline{K}(j+n)} z(n, g_1 k' - g_0(j+n)\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k'}}^{\theta}(j, j+n) \\
&= \sum_{n=1}^{g_1} \sum_{k' \in \overline{K}(j+n)} \mathbb{1}_{\{k' \geq k_1(j+n)\}}\, n\, \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k'}}^{\theta}(j, j+n)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}^{\theta}(j,k) &= \sum_{n=1}^{g_1} n \sum_{k' > k_1(j+n)} \sum_{k'' \in K(j+n-1)} c_{k,k''}^{\theta}(j, j+n-1)c_{k'',k'}^{\theta}(j+n-1, j+n) \\
&= \sum_{n=1}^{g_1} n \sum_{k'' \in K(j+n-1)} c_{k,k''}^{\theta}(j, j+n-1)P_{\theta}\left(X_1 \geq k_1(j+n) - k''\right) \\
&= \sum_{n=1}^{g_1} n \sum_{k'' \in K(j+n-1)} c_{k,k''}^{\theta}(j, j+n-1)r_k^{\theta}(j+n-1, j+n)\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}^{\theta}(j) = \sum_{n=1}^{g_1} n\, \boldsymbol{r}^{\theta}(j, j+n)\,.$$

Durch Einsetzen von $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}^{\theta}(j)$ in die Gleichung (22) ergibt sich das Gleichungssystem zur Berechnung von $\boldsymbol{u}^{\theta}(j) = \{\mathrm{E}_{\theta}\left(\delta^*(j,k)N^*(j,k)\right)\}_{k \in K(j)}$.
Mit Hilfe dieser beiden Erwartungswertvektoren läßt sich nun ein Gleichungssystem zur Berechnung der ersten Ableitung der Gütefunktion aufstellen.

Satz 4.5: *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.2 und 4.2 erfüllt und* $\gamma_0/\gamma_1 = g_0/g_1$, $g_0, g_1 \in \Gamma$, $g_1 > 0$. *Dann gilt für den Vektor der ersten Ableitung* $\boldsymbol{m}^{\theta\prime}(j)$ *der Gütefunktion* $\boldsymbol{m}^{\theta}(j)$, $\theta \in \Theta$, *der Tests* $T^*(j,k)$ *für* $\forall k \in K(j)$ *und* $j \in \Gamma_0^+$ *die folgende Gleichung*

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\right)\boldsymbol{m}^{\theta\prime}(j) = \\
&\qquad - c'(\theta)\sum_{n=1}^{g_1} n\, \boldsymbol{r}^{\theta}(j, j+n) - d'(\theta)\widetilde{\boldsymbol{K}}(j)\sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{r}^{\theta}(j, j+n) \\
&\qquad + d'(\theta)\sum_{n=0}^{g_1-1} \mathbf{C}^{\theta}(j, j+n)\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{k'}}^{\theta}(j+n, j+n+1) \\
&\qquad + \left[d'(\theta)g_0 - c'(\theta)g_1\right]\mathbf{C}^{\theta}(j, j+g_1)\boldsymbol{m}^{\theta}(j) - d'(\theta)\widetilde{\boldsymbol{C}}^{\theta}(j, j+g_1)\boldsymbol{m}^{\theta}(j)\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}(j) = \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_n \end{pmatrix}, \quad k_i \in K(j) \quad \textit{und}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1c_{1,2} & 2c_{1,3} & \dots & nc_{1,n} \\ -1c_{2,1} & 0 & 1c_{2,3} & \dots & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & \dots\dots\dots\dots & & 0 & 1c_{n-1,n} \\ -nc_{n,1} & \dots\dots\dots\dots & & -1c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Die Elemente $c_{i,l}$; $i, l = 1, \dots, n$; *der Matrix* $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+g_1)$ *sind wie folgt definiert:*

$$c_{i,l} = c_{k_i, k_l'}(j, j+g_1); k_i \in K(j), k_l' \in K(j+g_1).$$

Dabei gelte für $k_i \in K(j)$ *bzw.* $k_l' \in K(j+g_1)$*:*

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1(j), & k_1' &= k_1(j+g_1), \\ k_2 &= k_1(j) - 1, & k_2' &= k_1(j+g_1) - 1, \\ &\dots & &\dots \\ k_n &= k_0(j), & k_n' &= k_0(j+g_1). \end{aligned}$$

Die Dimension n der beiden Matrizen ist durch die Wahl der Abbruchgrenzen a^* *und* b^* *sowie durch den Trennparameter* θ^* *bestimmt. Es gilt*

$$n = \left[\frac{a^* - b^*}{\gamma_1}\right].$$

Beweis: Nach Satz 4.2 und mit den Definitionen 4.1 ist

$$\begin{aligned} m_k^{\theta'}(j) &= \frac{d\, m_k^\theta(j)}{d\theta} \\ &= d'(\theta) \left[\frac{1}{\gamma_1} s_k^\theta(j) - \left(k - j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right) m_k^\theta(j) + C_1\, u_k^\theta(j)\right] \end{aligned}$$

Daraus folgt für den Vektor der Ableitungen der Gütefunktion $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\theta}'}(j)$ mit Hilfe von Satz 4.3 und Satz 4.4 sowie nach Multiplikation mit $(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+g_1))$:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\theta}'}(j) = \\ &d'(\theta) \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\gamma_1 \sum_{n=0}^{g_1 - 1} \mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+n) \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{k}'}^{\boldsymbol{\theta}}(j+n, j+n+1) - \gamma_0 \sum_{n=1}^{g_1} (j+n) \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+n)\right)\right. \\ &\qquad - \left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+g_1)\right) \widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\, \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\theta}}(j) \\ &\qquad \left. + C_1 \left(\sum_{n=1}^{g_1} n\, \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+n) + g_1\, \mathbf{C}^{\boldsymbol{\theta}}(j, j+g_1)\, \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\theta}}(j)\right)\right], \end{aligned}$$

mit

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)=\begin{pmatrix} k_1-j\frac{\gamma_0}{\gamma_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_n-j\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\end{pmatrix}, \quad k_i\in K(j).$$

Es ist $C_1=\frac{\gamma_0}{\gamma_1}-\frac{c'(\theta)}{d'(\theta)}$, so daß sich

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathbf{E}_{j,j+g_1}-\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\Big)\,\boldsymbol{m}^{\theta\prime}(j)= \\
&\quad d'(\theta)\sum_{n=0}^{g_1-1}\mathbf{C}^{\theta}(j,j+n)\boldsymbol{b}^{\theta}_{k'}(j+n,j+n+1)-c'(\theta)\sum_{n=1}^{g_1}n\,\boldsymbol{r}^{\theta}(j,j+n) \\
&\quad +\left[d'(\theta)g_0-c'(\theta)g_1\right]\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\,\boldsymbol{m}^{\theta}(j)-d'(\theta)\frac{\gamma_0}{\gamma_1}j\sum_{n=1}^{g_1}\boldsymbol{r}^{\theta}(j,j+n) \\
&\quad -d'(\theta)\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\boldsymbol{m}^{\theta}(j)+d'(\theta)\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\boldsymbol{m}^{\theta}(j)
\end{aligned}$$

ergibt. Weiterhin folgt aus Satz 3.4

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\boldsymbol{m}^{\theta}(j)=\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\,\boldsymbol{m}^{\theta}(j)+\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\sum_{n=1}^{g_1}\boldsymbol{r}^{\theta}(j,j+n).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathbf{E}_{j,j+g_1}-\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\Big)\,\boldsymbol{m}^{\theta\prime}(j)= \\
&\quad d'(\theta)\sum_{n=0}^{g_1-1}\mathbf{C}^{\theta}(j,j+n)\boldsymbol{b}^{\theta}_{k'}(j+n,j+n+1)-c'(\theta)\sum_{n=1}^{g_1}n\,\boldsymbol{r}^{\theta}(j,j+n) \\
&\quad +\left[d'(\theta)g_0-c'(\theta)g_1\right]\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\,\boldsymbol{m}^{\theta}(j)-d'(\theta)\widetilde{\boldsymbol{K}}(j)\sum_{n=1}^{g_1}\boldsymbol{r}^{\theta}(j,j+n) \\
&\quad +d'(\theta)\left[\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\,\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)-\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\right]\boldsymbol{m}^{\theta}(j).
\end{aligned}$$

Für die Differenz $\left[\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\,\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)-\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\right]$ gilt

$$\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)\,\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)-\widetilde{\boldsymbol{K}}_1(j)\,\mathbf{C}^{\theta}(j,j+g_1)=\left\{(k_i-k_l)c_{k_i,k_l}(j,j+g_1)\right\}_{i,l=1,\dots,n},$$

$k_i\in K(j)$ und $k_1=k_1(j)$, $k_n=k_0(j)$.
Nach Definition 3.1 ist

$$\begin{aligned}
k_0(j) &= \min\left\{k\in\Gamma: k>\frac{\gamma_0}{\gamma_1}j+\frac{b^*}{\gamma_1}\right\} \text{ und} \\
k_1(j) &= \max\left\{k\in\Gamma: k<\frac{\gamma_0}{\gamma_1}j+\frac{a^*}{\gamma_1}\right\},
\end{aligned}$$

so daß sich

$$\begin{aligned}
k_1-k_n &= k_1(j)-k_0(j) \\
&= \left[\frac{a^*-b^*}{\gamma_1}\right]
\end{aligned}$$

ergibt und somit

$$n = \left[\frac{a^* - b^*}{\gamma_1}\right].$$

gilt.

Damit ist es also möglich, für sequentielle Tests $T^*(j,k)$ mit beliebigem Startpunkt $(j,k) \in M$ zur Entscheidung über zusammengesetzte Hypothesen der Form (1), die Ableitungen von Güte- bzw. OC-Funktion zu berechnen.

4.3 Der Spezialfall $\theta = \theta^*$

Im Fall $\theta = \theta^*$ ergeben sich spezielle Gleichungssysteme zur Berechnung der Güte- bzw. OC-Funktion sowie ihrer Ableitungen. Im folgenden werden diese für die Gütefunktion und ihren Anstieg angegeben.
Sei (N^*, δ^*) ein sequentieller Test zur Entscheidung zwischen den Hypothesen (1) mit dem Fortsetzungsgebiet M, darstellbar in der Form (2). $T^*(j,k)$ seien die den Punkten $(j,k) \in M$ zugeordneten Tests und θ der unbekannte reellwertige Verteilungsparameter mit Werten in einer Parametermenge $\Theta = \left(\underline{\theta}, \overline{\theta}\right)$ einer zur einparametrigen Exponentialfamilie gehörenden Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_\theta(X = x) = f_\theta(x) = h(x)\exp\{d(\theta)x - c(\theta)\}$. Dann gilt unter den Voraussetzungen der Sätze 3.4, 4.1 und 4.5 für $j \in \Gamma_0^+$ und $\theta = \theta^*$

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{m}^{\theta^*}(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{r}^{\theta^*}(j, j+n), \tag{23}$$

$$\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{m}^{\theta^*\prime}(j) = \sum_{n=1}^{g_1} \boldsymbol{r}^{\theta^*\prime}(j, j+n) - \mathbf{C}^{\theta^*\prime}(j, j+g_1)\boldsymbol{m}^{\theta^*}(j) \tag{24}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+g_1)\right) \boldsymbol{m}^{\theta^*\prime}(j) = &-\gamma_0 \sum_{n=1}^{g_1} n\, \boldsymbol{r}^{\theta^*}(j, j+n) \\ &+ \gamma_1 \left(\mathbf{E}_{j,j+g_1} - \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+g_1)\right) \widetilde{\boldsymbol{K}}(j) \boldsymbol{m}^{\theta^*}(j) \\ &+ \gamma_1 \sum_{n=0}^{g_1-1} \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+n) \boldsymbol{b}_{k'}^{\theta^*}(j+n, j+n+1).\end{aligned} \tag{25}$$

Dabei gilt für $k \in K(j+n-1)$, $k' \in K(j+n)$ und $n = 1, \ldots, g_1$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}^{\theta^*}(j, j+n) &= \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+n-1)\, \boldsymbol{r}^{\theta^*}(j+n-1, j+n), \\ r_k^{\theta^*}(j+n-1, j+n) &= P_{\theta^*}(X_1 > k_1(j+n) - k), \\ \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+n) &= \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+n-1)\mathbf{C}^{\theta^*}(j+n-1, j+n) \\ c_{k,k'}^{\theta^*}(j+n-1, j+n) &= P_{\theta^*}(X_1 = k' - k), \\ \mathbf{C}^{\theta^*\prime}(j, j+n) &= \mathbf{C}^{\theta^*\prime}(j, j+n-1)\mathbf{C}^{\theta^*}(j+n-1, j+n) \\ &\quad + \mathbf{C}^{\theta^*}(j, j+n-1)\mathbf{C}^{\theta^*\prime}(j+n-1, j+n), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^{\theta^*\prime}(j,j+n) &= \mathbf{C}^{\theta^*\prime}(j,j+n-1)r^{\theta^*}(j+n-1,j+n) \\
&\quad + \mathbf{C}^{\theta^*}(j,j+n-1)r^{\theta^*\prime}(j+n-1,j+n)\,, \\
r_k^{\theta^*\prime}(j+n-1,j+n) &= \left.\frac{P_{\theta^*}(X_1 > k_1(j+n)-k)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*}, \\
c_{k,k'}^{\theta^*}(j+n-1,j+n) &= \left.\frac{P_{\theta^*}(X_1 = k'-k)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*}, \\
\boldsymbol{b}_{k'}^{\theta^*}(j+n,j+n+1) &= \left\{\sum_{k'>k_1(j)} k'P_{\theta^*}(X_1 = k'-k'')\right\}_{k''\in K(j+n)} \qquad \text{und} \\
\widetilde{\boldsymbol{K}}(j) &= \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_n \end{pmatrix}, \quad k_i \in K(j)\,.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungssysteme (23) und (24) sind Folgerungen der Sätze 3.4 bzw. 4.1, die sich sofort aus (8) und (13) mit $\theta = \theta^*$ ergeben.
Das Gleichungssystem (25) ergibt sich zum einen aus Satz 4.2 mit $C_1 = 0$ für $\theta = \theta^*$ sowie mit Hilfe von Satz 4.3, in dem ein Gleichungssystem zur Berechnung des Erwartungswertvektors $\boldsymbol{s}^{\theta^*}(j) = \left\{\mathrm{E}_{\theta^*}\left(\delta^*(j,k)Z_{N^*}^*(j,k)\right)\right\}_{k\in K(j)}$ angegeben wird.
Zu dem gleichen Ergebnis, dem Gleichunssystem (25), führt das Ausrechnen der Ableitungen $\mathbf{C}^{\theta^*\prime}(j,j+g_1)$ und $\boldsymbol{r}^{\theta^*\prime}(j,j+n)$, $n = 1,\ldots,g_1$ in (24).

5 Beispiele

Beispiel 5.1: Gegeben sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$
\begin{aligned}
f_\theta(x) \; = P_\theta(X = x) \; &= h(x)\exp\{d(\theta)\,x - c(\theta)\} \\
&= \theta^x(1-\theta)^{(1-x)}\,, \qquad x = 0,1\,;\; 0 < \theta < 1\,.
\end{aligned}
$$

Zu prüfen seien anhand des Tests (N^*, δ^*) die Hypothesen

$$H_0 : \theta \leq 0.03 \quad \text{und} \quad H_1 : \theta > 0.03\,.$$

Gefordert sei, daß bei einem tatsächlichen Parameter $\theta = 0.01$ der Test die Hypothese H_0 mit einer Wahrscheinlichkeit $\alpha \leq 0.1$ ablehnt.
Eine solche Testsituation kann z. B. in der Qualitätskontrolle vorliegen, wenn durch eine sequentielle Kontrolle über die Annahme bzw. Ablehnung einer Warenlieferung mit einem unbekannten Ausschußanteil entschieden werden soll und eine Ablehnung des Postens nur erfolgt, falls der Ausschußanteil größer als ein vorgegebener Wert ist sowie außerdem gefordert wird, daß ein Posten mit einer bestimmten (sehr kleinen) Ausschußrate mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit angenommen wird (siehe auch [8]).

Aus den anfangs beschriebenen Anforderungen an den Test ergibt sich für die Gütefunktion des Tests (N^*, δ^*) die Forderung

$$M^*(0.01) \leq 0.1 .$$

Nach Satz 6 in [3] können dann die Stoppgrenzen des Tests wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned} a^* &= -\frac{d'(\theta^*)}{d(\theta'') - d(\theta')} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \\ b^* &= -a^* , \end{aligned}$$

wobei θ'' durch die Beziehung

$$\frac{c'(\theta^*)}{d'(\theta^*)} = \frac{c(\theta'') - c(\theta')}{d(\theta'') - d(\theta')}$$

definiert ist. Mit

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \quad \text{und} \\ c(\theta) &= -\ln(1-\theta) \end{aligned}$$

ergibt sich für $\alpha = 0.1$, $\theta^* = 0.03$ und $\theta' = 0.01$

$$\begin{aligned} a^* &= 38.741267 \quad \text{und} \\ b^* &= -38.741267 . \end{aligned}$$

Die Testgröße des Tests ist entsprechend Gleichung (13) in [3]

$$\begin{aligned} Z_n^* &= \frac{1}{\theta^*(1-\theta^*)} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta^*\right] \\ &= \frac{10000}{291} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.03n\right] . \end{aligned}$$

In Tabelle 1 und den Abbildungen 1 bis 3 sind die Gütefunktion, der mittlere Stichprobenumfang sowie die Ableitung der Gütefunktion, die mit Hilfe der in den vorangegangenen Kapiteln angegebenen Gleichungssysteme ermittelt wurden, dargestellt.

Beispiel 5.2: Gegeben sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\begin{aligned} f_\theta(x) = P_\theta(X = x) &= h(x) \exp\{d(\theta)\, x - c(\theta)\} \\ &= \frac{\theta^x}{x!} \exp\{-\theta\} , \qquad x = 0, 1, \ldots ; \ \theta > 0 . \end{aligned}$$

Zu prüfen seien anhand des Tests (N^*, δ^*) die Hypothesen

$$H_0 : \theta \leq 0.03 \quad \text{und} \quad H_1 : \theta > 0.03 .$$

Gefordert werde analog dem Beispiel 5.1, daß bei einem tatsächlichen Parameter $\theta = 0.01$ der Test mit einer Wahrscheinlichkeit $\alpha \leq 0.1$ die Hypothese H_0 ablehnt. Aus den Anforderungen an den Test ergibt sich für die Gütefunktion wiederum

$$M^*(0.01) \leq 0.1\,.$$

Die Stoppgrenzen des Tests können ebenfalls wieder mit Hilfe von Satz 6 in [3] berechnet werden. Mit

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \ln\theta \quad \text{und} \\ c(\theta) &= \theta \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} a^* &= -\frac{1}{\theta^*(\ln\theta'' - \ln\theta')}\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \\ b^* &= -a^*\,, \end{aligned}$$

wobei θ'' durch die Beziehung

$$\theta^* = \frac{\theta'' - \theta'}{\ln\theta'' - \ln\theta'}$$

definiert ist. Für $\alpha = 0.1$, $\theta^* = 0.03$ und $\theta' = 0.01$ ist damit

$$\begin{aligned} a^* &= 38.470585 \quad \text{und} \\ b^* &= -38.470585\,. \end{aligned}$$

Die Testgröße des Tests ist entsprechend Gleichung (13) in [3]

$$\begin{aligned} Z_n^* &= \frac{1}{\theta^*}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta^*\right] \\ &= \frac{100}{3}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.03n\right]. \end{aligned}$$

In Tabelle 2 und den Abbildungen 1 bis 3 sind für diesen Test die Gütefunktion, der mittlere Stichprobenumfang sowie die Ableitung der Gütefunktion dargestellt.

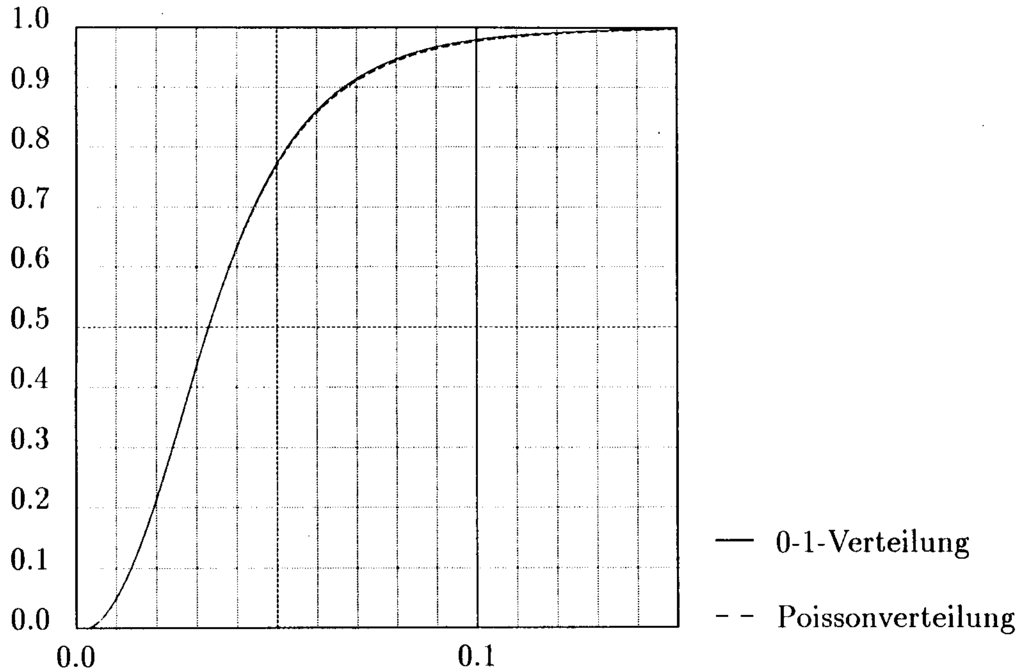

Abbildung 1: Die Gütefunktionen zu Beispiel 5.1 und 5.2

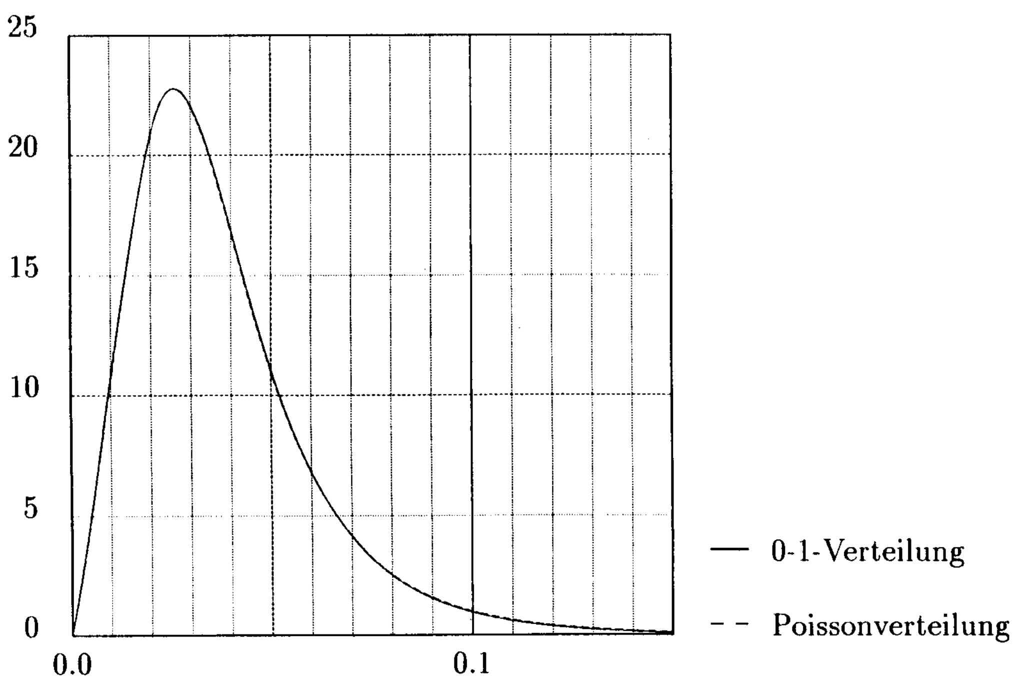

Abbildung 2: Die Ableitung der Gütefunktionen zu Beispiel 5.1 und 5.2

$\theta^* = 0.030$			
θ_0	$E_{\theta_0} N^*$	$M^*(\theta_0)$	$M^{*\prime}(\theta_0)$
0.010	50.45666927	0.05040215	10.80017452
0.020	58.45310423	0.21380152	20.83930384
0.030	58.36030832	0.43615976	22.06009772
0.040	52.55722275	0.63343720	16.88860022
0.050	45.10408530	0.77226906	11.06391690
0.060	38.23156793	0.86023299	6.82344850
0.070	32.56584243	0.91398106	4.14528983
0.080	28.06370404	0.94665591	2.52688065
0.090	24.50861640	0.96665581	1.55488110
0.100	21.68319720	0.97902037	0.96646003
⋮	⋮	⋮	⋮
0.200	10.06111691	0.99979105	0.00996931
0.300	6.66809516	0.99999870	0.00007055
0.400	5.00001870	1.00000000	0.00000024
0.500	4.00000011	1.00000000	0.00000000
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 1: Mittlerer Stichprobenumfang, Gütefunktion und Ableitung der Gütefunktion zu Beispiel 5.1

$\theta^* = 0.030$			
θ_0	$E_{\theta_0}N^*$	$M^*(\theta_0)$	$M^{*\prime}(\theta_0)$
0.010	51.88668905	0.04971789	10.72841772
0.020	60.19545949	0.21292472	20.85585147
0.030	60.05635843	0.43517098	22.00107781
0.040	54.03870530	0.63144791	16.76532781
0.050	46.38828982	0.76915106	10.97224259
0.060	39.37244126	0.85649564	6.79077043
0.070	33.60253766	0.91015741	4.15720405
0.080	29.01984416	0.94308912	2.56336526
0.090	25.39882028	0.96351344	1.60139591
0.100	22.51742899	0.97635523	1.01434551
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.200	10.61673094	0.99958588	0.01627496
0.300	7.17365758	0.99999170	0.00032379
0.400	5.50058710	0.99999983	0.00000655
0.500	4.50036757	1.00000000	0.00000013
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 2: Mittlerer Stichprobenumfang, Gütefunktion und Ableitung der Gütefunktion zu Beispiel 5.2

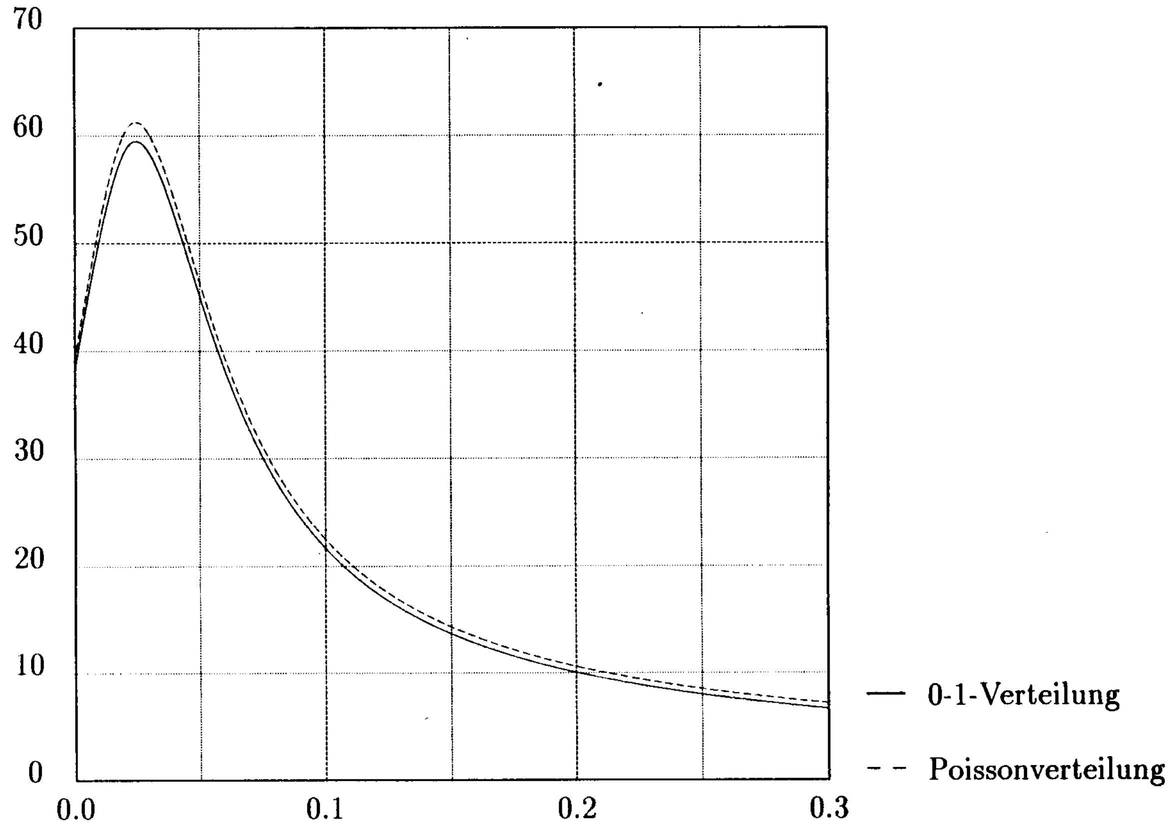

Abbildung 3: Die ASN-Funktionen zu Beispiel 5.1 und 5.2

Literatur

[1] Eger, K.-H. *A direct method of the computation of the OC and of the moments of the sample number for SPRTs in the case of discrete random variables.* Math. Operationsforschung und Statistik, Series Statistics, 11, 499-514, 1980.

[2] Eger, K.-H. *Sequential Tests.* Teubner-Texte zur Mathematik; Band 74, Leipzig 1985.

[3] Eger, K.-H., Schwager, A. *Sequentielle Tests für zusammengesetzte Hypothesen.* Preprint 96-5, Technische Universität Chemnitz-Zwickau, 1996.

[4] Ghosh, B.K. *Sequential Tests of Statistical Hypotheses.* Addison-Wesley Publishing Company 1970.

[5] Ghosh, B.K. & Sen, P.K. *Handbook of sequential Analasys.* Marcel Dekker, INC. New York 1991

[6] Govindarajulu, Z. *The Sequential Statistical Analysis of Hypothesis Testing Point and Interval Estimation, and Decision Theory.* American Series in Mathematical and Management Sciences; American Sciences Press, Inc. Columbus, Ohio 1981.

[7] Siegmund, D. *Sequential Analysis, Tests and Confidenz Intervals.* Springer Verlag New York 1985.

[8] Uhlmann, W. *Statistische Qualitätskontrolle.* B. G. Teubner Stuttgart 1966.